

**Министерство образования, науки и молодежной политики
Краснодарского края**

ГБПОУ КК «Армавирский машиностроительный техникум»

Учебное пособие
Основы теории графов

для студентов специальности 09.02.07
«Информационные системы и программирование»

Содержание

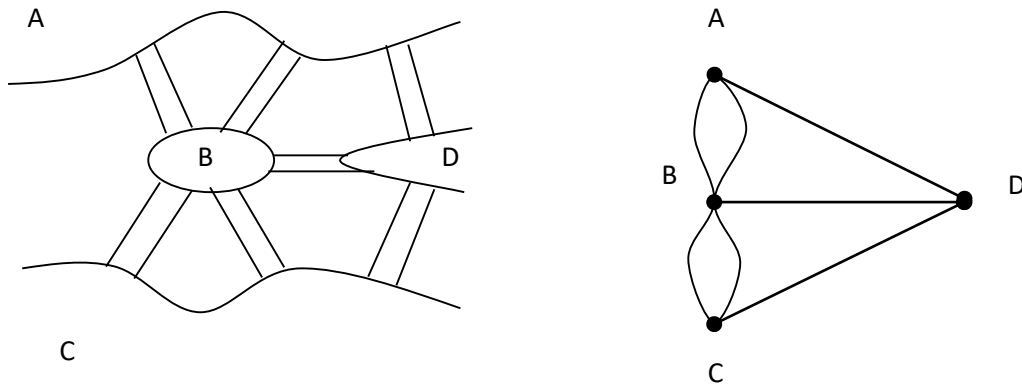
1.	Понятие графа и его элементов. Типы графов	5
1.1.	Из истории развития теории графов	5
1.2.	Понятие графа. Элементы графа	6
1.3.	Типы графов	7
1.4.	Степень вершины. Однородные графы	8
1.5.	Изоморфные графы	9
1.6.	Плоские и неплоские графы	11
2.	Части графа. Операции с частями графа	12
3.	Маршруты. Связность графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы	14
3.1.	Маршруты, цепи и циклы	14
3.2.	Связность и делимость графов	15
3.3.	Эйлеровы графы	16
3.4.	Гамильтоновы линии	17
4.	Матричный способ задания графов	17
4.1.	Матрица смежности	18
4.2.	Матрица инцидентности	19
4.3.	Список ребер	19
5.	Ориентированные графы	20
5.1.	Понятие ориентированного графа	20
5.2.	Степени вершин орграфа	21
5.3.	Ориентированные маршруты	21
5.4.	Связность орграфов	22
5.5.	Матрица смежности орграфа	23
5.6.	Матрица инцидентности орграфа	24
5.7.	Графы и бинарные отношения	24
6.	Деревья	25
6.1.	Понятие дерева. Свойства свободных деревьев	25
6.2.	Дерево с корнем, ветви дерева	26

6.3.	Типы вершин и центры деревьев	27
6.4.	Ориентированное дерево	27
6.5.	Бинарные деревья	28
7.	Взвешенные графы. Раскраска графов	30
8.	Приложения теории графов в различных областях науки и техники	32
8.1.	Графы и информация	32
8.2.	Графы и химия	33
8.3.	Графы и биология	33
8.4.	Графы и физика	34
	Задания для самостоятельного решения	35
	Контрольные вопросы	38

1. Понятие графа и его элементов. Типы графов

1.1. Из истории развития теории графов

Первая работа по теории графов была опубликована Л. Эйлером в 1736 году. Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах: «Можно ли совершить прогулку по городу таким образом, чтобы выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту?»



Т.к. неважно, как проходит путь по частям суши, то их можно представить точками. А так как связи между этими частями осуществляются только через 7 мостов, то каждый из них можно изобразить некоторой линией, соединяющей соответствующие точки. В результате получается граф.

Эйлер дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Более того, он доказал, что подобный маршрут имеется только для такого графа, каждая из вершин которого связана с четным числом ребер.

Вначале теория графов имела дело в основном с математическими развлечениями и головоломками. Но уже в 19 веке графы стали использоваться при решении ряда важных практических проблем: при построении схем электрических цепей, молекулярных схем, при решении транспортных задач. Несмотря на это, теория графов как математическая дисциплина сформировалась только в 30-х годах 20 века, когда венгерский математик Денеш Кёниг ввел понятие «граф».

Теория графов тесно связана с такими разделами математики, как теория множеств, теория матриц, математическая логика и теория вероятностей. Во всех этих разделах графы применяют для представления различных

математических объектов, и в то же время сама теория графов широко использует аппарат родственных разделов математики. Теория графов располагает также мощным аппаратом решения прикладных задач из самых разных областей науки и техники: в программировании, экономике, психологии, биологии.

1.2. Понятие графа. Элементы графа

Опр. *Графом* называется совокупность 2-х множеств: V (точек) и E (линий, соединяющих какие-либо две точки). Элементы множества V называются **вершинами** графа, а элементы множества E - его **ребрами**.

Обозначение: G

Напр.: Построим граф игр, сыгранных командами, если в соревнованиях участвуют 6 команд A, B, C, D, E и F, причем некоторые команды уже сыграли друг с другом:

A – с C, D, F;

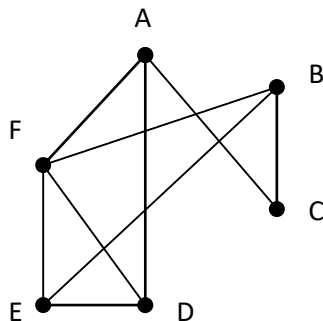
B – с C, E, F;

C – с A, B;

D – с A, E, F;

E – с B, D, F;

F – с A, B, D, E.



Из рисунка видно, какие команды еще не играли друг с другом.

(!!) Точки пересечения некоторых ребер графа могут не являться его вершинами. Поэтому вершины графа должны отличаться отчетливо.

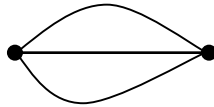
Опр. Две вершины, которые соединяет ребро графа, называются **граничными вершинами** этого ребра и являются **смежными**.

При этом говорят, что вершины инцидентны ребру.

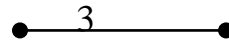
Опр. Ребро, граничные вершины которого совпадают, называется **петлей**.



Опр. Ребра с одинаковыми граничными вершинами называются *кратными*.

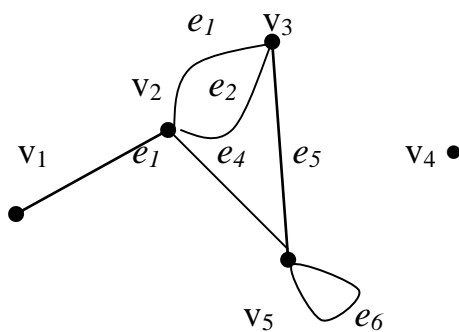


Их можно изобразить так:



Опр. Вершины, которые не имеют инцидентных ребер, называются *изолированными вершинами*.

Напр.: В графе:



e_6 – петля

e_2 и e_3 – кратные ребра

v_4 – изолированная вершина

v_3 и v_5 – $\begin{cases} \text{смежные} \\ \text{инцидентны ребру } e_5 \end{cases}$

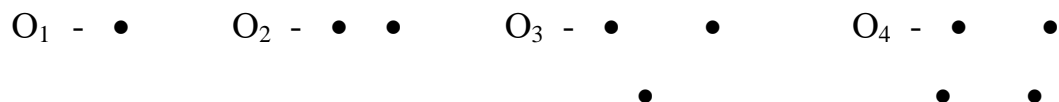
1.3. Типы графов

Опр. Если множества V и E конечны, то граф называется *конечным*. Конечный граф, содержащий p вершин и q ребер, называется $(p; q)$ – *графом*.

Опр. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется *пустым* или *нуль-графом*.

Обозначение: O_n , где n – число вершин

Напр.:

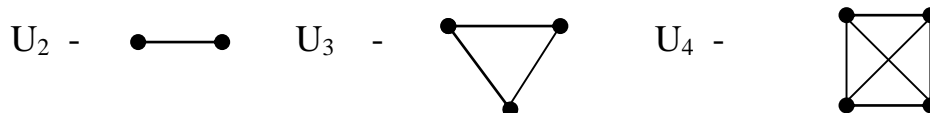


Опр. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

Опр. Простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется *полным*.

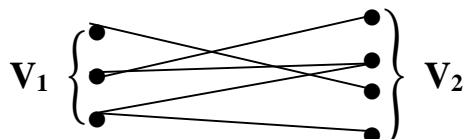
Обозначение: U_n , где n – число вершин

Напр.:



Опр. Если множество вершин простого графа V допускает такое разбиение на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 , что не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества, то он называется *двудольным* или *биграфом*.

Напр.:



Опр. Граф без петель, но с кратными ребрами называется *мультиграфом*.

Опр. Граф, содержащий хотя бы одну петлю, называется *псевдографом*.

(!!) В псевдографе могут быть кратные ребра.

1.4. Степень вершины. Однородные графы

Опр. Число ребер, инцидентных вершине, называется *степенью* вершины.

Обозначение: $\rho(v_i)$

(!!) При подсчете степени вершины петля учитывается дважды.

Так, для графа игр: $\rho(A) = \rho(B) = \rho(D) = \rho(E) = 3$, $\rho(F) = 4$, $\rho(C) = 2$.

Опр. Вершины, степени которых являются четными числами, называются *четными вершинами*. Вершины с нечетной степенью называются *нечетными*.

Опр. Вершина, степень которой равна 1, называется *концевой вершиной*.

(!!) Очевидно, что:

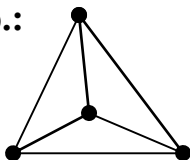
1) степень изолированной вершины равна 0;

2) сумма степеней всех его вершин равна удвоенному числу ребер, т.е. является четным числом;

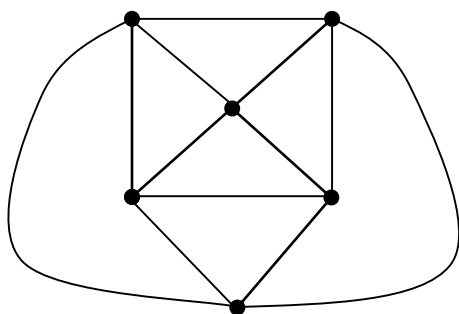
3) число нечетных вершин любого графа четно.

Опр. Граф, степени вершин которого одинаковы и равны r , называется **однородным степени r** .

Напр.:



- однородный степени 3 (полный)



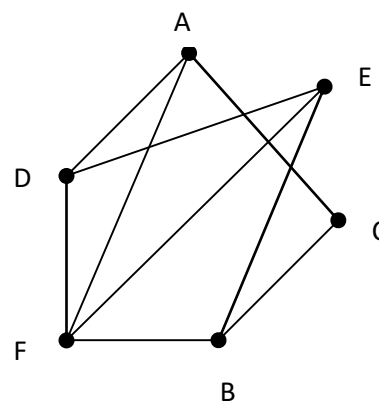
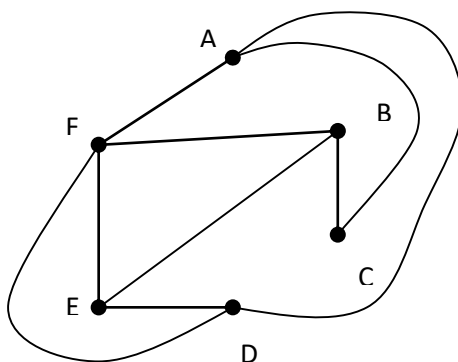
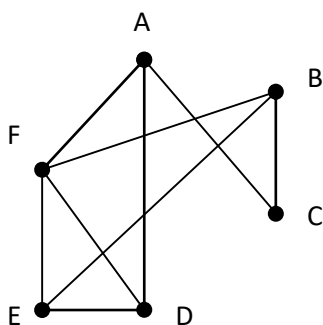
- однородный степени 4 (неполный)

(!!) Полный граф с n вершинами – всегда однородный степени $(n - 1)$, а пустой граф – однородный степени 0.

1.5. Изоморфные графы

Один и тот же граф можно изобразить по-разному, т.к. вершины можно располагать на плоскости произвольно и ребра рисовать либо прямыми линиями, либо кривыми.

Так, например, три графа, изображенные на рисунках,



в некотором смысле, один и тот же граф, т.к. они содержат одну и ту же информацию.

Опр. Два графа называются *изоморфными*, если они имеют одно и то же число вершин, и для любых 2-х вершин первого графа, соединенных ребром, соответствующие им вершины второго графа тоже соединены ребром и обратно.

Нередко приходится решать вопрос о том, являются ли два данных графа изоморфными. Иногда сразу ясно, что это не так. Например, графы



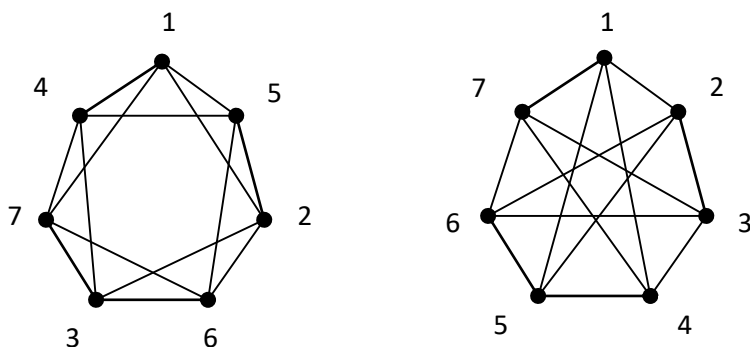
не могут быть изоморфными, т.к. они имеют разное число вершин.

Не могут быть изоморфными и графы



т.к. у них неодинаковое число ребер.

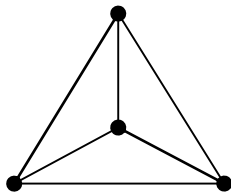
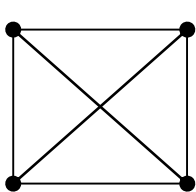
Однако, если сразу не видно, как доказать, что два графа не изоморфны, то вопрос об их изоморфности может оказаться довольно трудным. Например, рассмотрим два изоморфных графа:



Их изоморфность становится очевидной только после соответствующего обозначения их вершин.

1.6. Плоские и неплоские графы

Сравним два изоморфных графа, изображенных на рисунках:



На первом из них ребра пересекаются в точке, не являющейся вершиной графа, на втором – все точки пересечения ребер графа служат его вершинами.

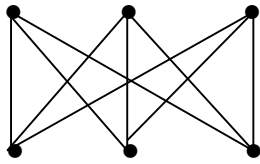
Опр. Граф называется *плоским*, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин данного графа.

Опр. Граф называется *планарным*, если существует изоморфный ему плоский граф, т.е. если его можно изобразить на плоскости таким образом, чтобы его ребра пересекались только в вершинах.

Так, граф, изображенный на первом рисунке, является планарным, т.к. существует изоморфный ему граф, не имеющий лишних точек пересечения.

Примерами плоских графов являются карты дорог, планы городов, где улицы служат ребрами, а площади и уличные перекрестки – вершинами. Еще одним примером применения плоских графов служит построение схем электрических цепей. Так, один из наиболее эффективных способов массового производства стандартных электрических схем для радио- и телевизионных приемников состоит в том, что схема наносится печатным способом в виде металлической фольги на бумажную или пластмассовую основу. Однако, для того чтобы оно было осуществимо, граф рассматриваемой сети проводов должен иметь плоское представление, ведь пересечение 2-х ребер привело бы к короткому замыканию в системе.

Задача о трех колодцах. Можно ли от каждого из 3-х домов проложить тропинку к каждому из 3-х колодцев так, чтобы тропинки не пересекались?



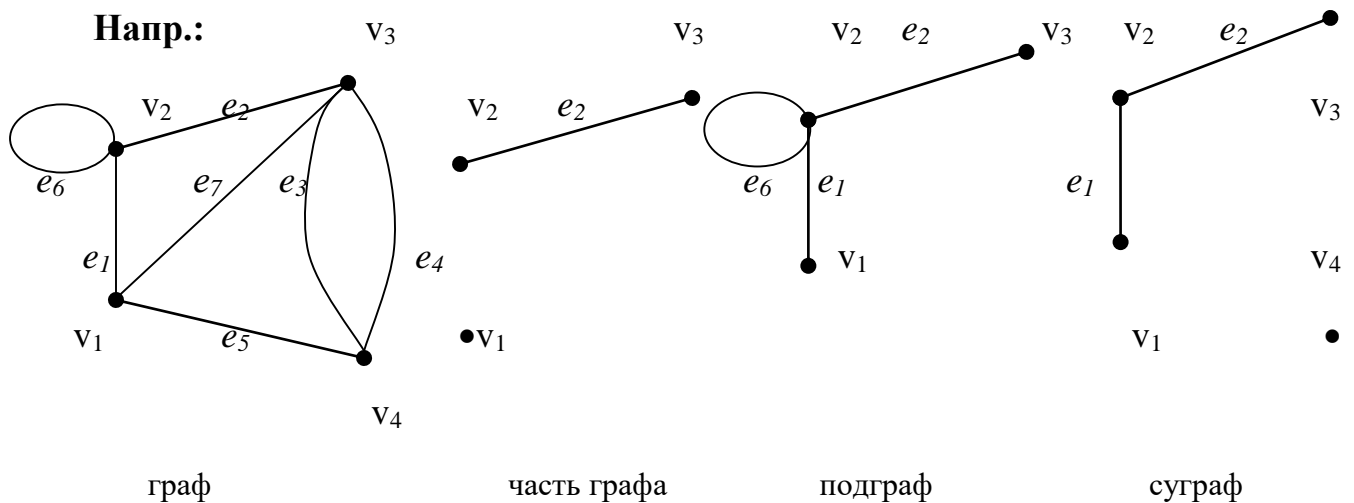
Задача не может быть решена положительно, т.к. граф этой задачи не является плоским.

2. Части графа. Операции с частями графа

Опр. Граф $G' = (V'; E')$ называется *частью графа* $G = (V; E)$, если $V' \subset V$ и $E' \subset E$.

Опр. Часть графа, которая не содержит изолированные вершины, называется *подграфом*.

Опр. Часть графа, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит и все вершины графа, называется *суграфом*.



Пусть даны две части графа G : G_1 и G_2

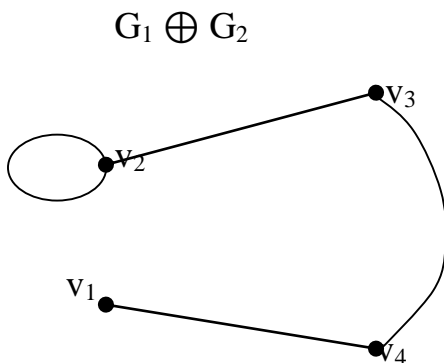
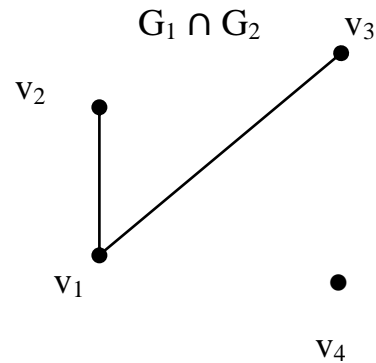
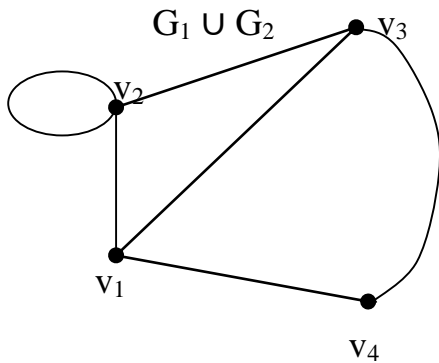
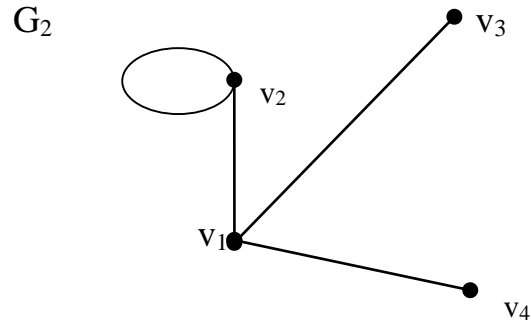
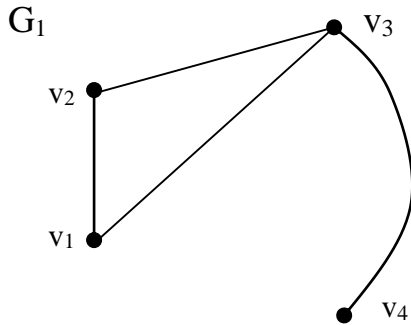
1. **Объединение графов** – это граф $G = G_1 \cup G_2$, множества вершин и ребер которого определяются так: $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

2. **Пересечение графов** – это граф $G = G_1 \cap G_2$, множества вершин и ребер которого определяются так: $V = V_1 \cap V_2$, $E = E_1 \cap E_2$.

Если $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то графы называются **непересекающимися**.

3. **Сложение по модулю 2** – это граф $G = G_1 \oplus G_2$, множество вершин которого $V = V_1 \cup V_2$, а множество ребер $E = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$.

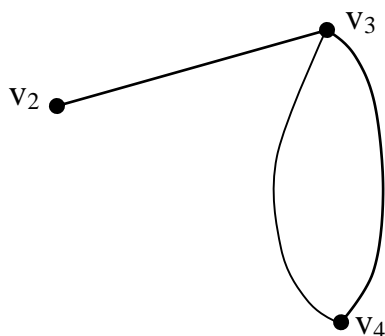
Напр.: Найдем $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ и $G_1 \oplus G_2$, если - части графа



4. Дополнение графа

Пусть G' - часть графа G , тогда совокупность всех ребер графа G , не принадлежащих его части G' , вместе с инцидентными вершинами образует **дополнение части G' до графа G** .

Так, дополнением для G_2 будет граф:

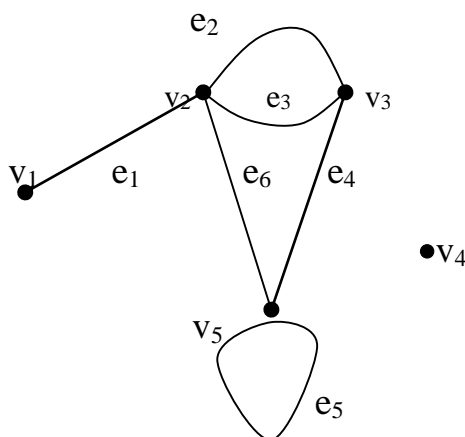


3. Маршруты. Связность графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы

3.1. Маршруты, цепи и циклы

Опр. *Маршрутом длины t* называется последовательность t ребер графа (не обязательно различных) таких, что два соседних ребра имеют общую вершину.

Напр.:



1) Маршрут $(e_1, e_2, e_3, e_6, e_5, e_6)$ имеет длину $t = 6$, проходит через вершины $v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_5, v_2$ и соединяет вершины v_1 с v_2 .

2) Маршрут (e_5, e_4, e_3, e_1) имеет длину $t = 4$, проходит через вершины v_5, v_5, v_3, v_2, v_1 и соединяет вершины v_5 с v_1 .

Опр. Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*, а маршрут, для которого различны все вершины, называется *простой цепью*.

Напр.: $(e_2; e_4; e_6)$ – цепь

$(e_1; e_2; e_4)$ – простая цепь

Опр. Маршрут, который приводит в ту же вершину, из которой начался, называется *замкнутым*.

Опр. Замкнутая цепь называется **циклом**, а простая замкнутая цепь – **простым циклом**.

Напр.: $(e_2; e_4; e_5; e_6)$ – цикл

$(e_3; e_6; e_4)$ – простой цикл

Опр. Граф называется **циклическим**, если он содержит хотя бы один цикл, в противном случае он называется **ациклическим**.

(!!) Очевидно, что мультиграфы и псевдографы являются циклическими.

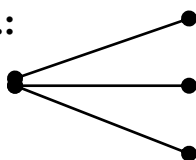
3.2. Связность и делимость графов

Опр. Две вершины графа называется **связанными**, если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, любая пара вершин которого связана, называется **связным графом**.

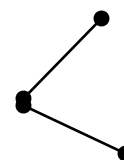
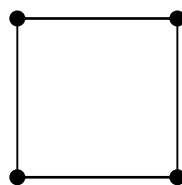
Очевидно, в связном графе между любыми двумя вершинами существует простая цепь, т.к. из связывающего их маршрута всегда можно удалить циклический участок, проходящий через некоторую вершину более одного раза.

Если граф несвязный, то множество его вершин можно единственным образом разделить на непересекающиеся подмножества, каждое из которых содержит все связанные между собой вершины и вместе с ребрами образует связный подграф. Такие подграфы называются **компонентами** несвязного графа.

Напр.:



Связный



Несвязный

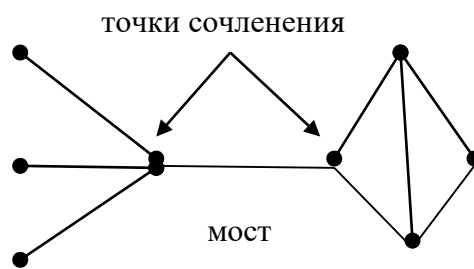
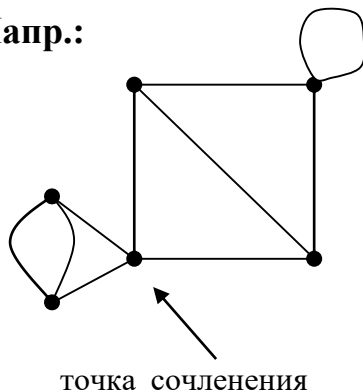
Связный граф можно разделить на несвязные подграфы, если удалить из него некоторые вершины и ребра. При удалении вершин исключаются и

все ребра, для которых эта вершина является граничной, при удалении же ребер вершины сохраняются.

Опр. Вершина, удаление которой превращает связный граф в несвязный, называется *точкой сочленения*. Ребро с такими свойствами называется *мостом*.

(!!) При наличии моста в графе имеются, по крайней мере, одна точка сочленения.

Напр.:



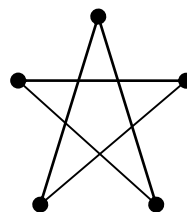
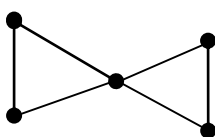
Опр. Связный граф называется *разделимым*, если он имеет хотя бы одну точку сочленения, в противном случае граф называется *неразделимым*.

3.3. Эйлеровы графы

Опр. Цикл, который содержит все ребра графа, называется *эйлеровым циклом*, а граф, в котором имеется такой цикл, называется *эйлеровым графом*.

Эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги. Т.о., эйлеровы графы – это такие графы, которые можно изобразить одним росчерком пера, причем процесс такого изображения начинается и заканчивается в одной и той же точке.

Напр.:

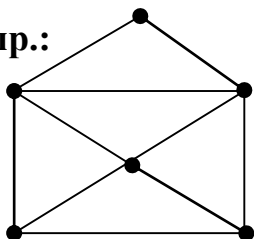


T1. (Эйлера) Конечный неориентированный граф эйлеров тогда и только тогда, когда он связан и степени всех его вершин четны.

Можно поставить задачу и об отыскании цепи, которая бы начиналась в одной вершине, оканчивалась в некоторой другой вершине и проходила бы по всем ребрам в точности по одному разу. Такие цепи называется эйлеровыми.

T2. Для того чтобы на связном графе имелась эйлерова цепь, необходимо и достаточно, чтобы в графе были ровно две нечетные вершины, которые и были бы концами этой цепи.

Напр.:

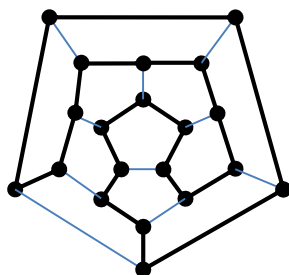


3.4. Гамильтоновы линии

Опр. Простой цикл, который проходит через все вершины графа, называется *гамильтоновым*.

В отличие от эйлерового этот цикл не покрывает всех ребер графа.

Напр.:



Если критерий существования эйлерового цикла очень прост, то для гамильтоновых циклов никакого общего правила не найдено.

4. Матричный способ задания графов

4.1. Матрица смежности

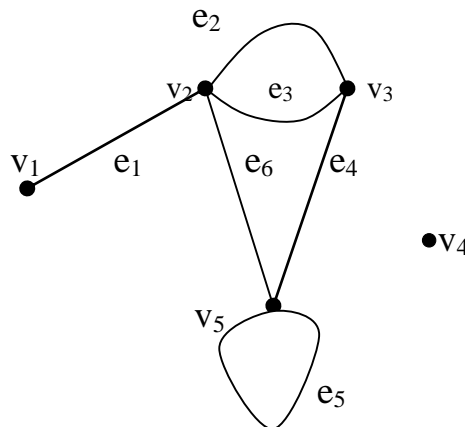
Отношение смежности на множестве вершин можно определить, представив каждое ребро как пару смежных вершин, т.е.

$$e_k = (v_i; v_j) = (v_j; v_i).$$

Очевидно, что петля при вершине v_i представляется парой $(v_i; v_i)$.

Множество вершин V вместе с определенным на нем отношением смежности полностью определяет граф. При этом граф можно представить **матрицей смежности**, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а ее $(i; j)$ - элемент равен числу кратных ребер, связывающих вершины v_i и v_j .

Напр.: Для графа



матрица смежности имеет вид:

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
0	1	0	0	0	v_1
1	0	2	0	1	v_2
0	2	0	0	1	v_3
0	0	0	0	0	v_4
0	1	1	0	2	v_5

(!!)₁ Матрица смежности симметрична относительно главной диагонали. В столбцах и строках, соответствующих изолированной вершине, все элементы равны нулю. Петле соответствует «2» на главной диагонали.

(!!)₂ Элементы матрицы простого графа равны нулю или единице, причем все элементы главной диагонали нулевые.

4.2. Матрица инцидентности

Рассматривая инцидентность вершин и ребер $(p; q)$ – графа, можно представить его матрицей инцидентности размера $p \times q$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элементы этой матрицы определяются по правилу: $(i; j)$ – элемент равен 1, если вершина v_i инцидентна ребру e_j , и равен 0, если v_i и e_j не инцидентны.

Так, для изображенного в предыдущем пункте графа матрица инцидентности имеет вид:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
1	0	0	0	0	0	v_1
1	1	1	0	0	1	v_2
0	1	1	1	0	0	v_3
0	0	0	0	0	0	v_4
0	0	0	1	2	1	v_5

(!!) Каждый столбец матрицы инцидентности содержит два единичных элемента. Если в вершине v_i имеется петля, то в соответствующей клетке ставится цифра 2. Нулевая строка соответствует изолированной вершине.

4.3. Список ребер

Это еще один способ задания графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру: в ней записаны номера вершин, инцидентных ему.

Для рассмотренного выше графа список ребер можно записать следующим образом:

Ребра	Вершины
e_1	1,2
e_2	2,3
e_3	2,3
e_4	3,5
e_5	5,5
e_6	2,5

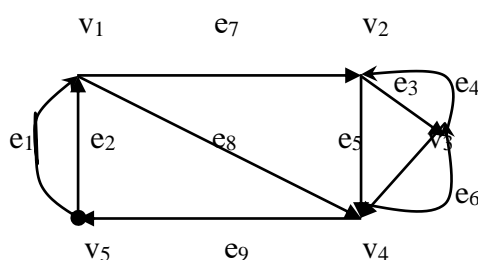
5. Ориентированные графы

5.1. Понятие ориентированного графа

Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается одностороннее движение, ток по проводам течет в одном направлении. Вершины соответствующих графов оказываются неравноправными, они рассматриваются в определенном порядке. При этом каждому ребру можно приписать направление от первой из вершин ко второй. Для указания направления соответствующее ребро отмечается стрелкой.

Опр. Направленные ребра называются *дугами*, а граф, содержащий их, – *ориентированным графом*. Первая по порядку вершина дуги называется ее *началом*, вторая – *концом*.

Напр.:



Опр. Две кратные дуги называются *строго параллельными*, если они одинаково направлены, и *нестрого параллельными*, если противоположно направлены.

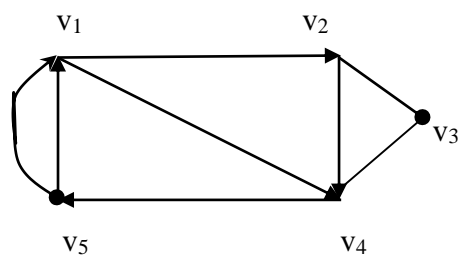
Напр.: e_1 и e_2 – строго параллельные дуги

e_3 и e_4, e_5 и e_6 – пары нестрого параллельных дуг

(!!) *Нестрого параллельные дуги, отображающие ориентацию связи в обоих направлениях, по существу, равноценны неориентированной связи и могут быть заменены ребром.*

Опр. Граф, который содержит ребра и дуги, называется *смешанным*.

Так, изображенный выше ориентированный граф можно изобразить в виде смешанного:



(!!) *Всякий неориентированный граф можно превратить в ориентированный, заменив в нем каждое ребро на пару нестрого параллельных дуг.*

Опр. Если изменить направления всех дуг орграфа на противоположные, то получится орграф, **обратный** исходному.

5.2. Степени вершин орграфа

В орграфе различают **положительные** $\rho^+(v_i)$ и **отрицательные** $\rho^-(v_i)$ степени вершин, которые равны соответственно числу исходящих из v_i и входящих в v_i дуг.

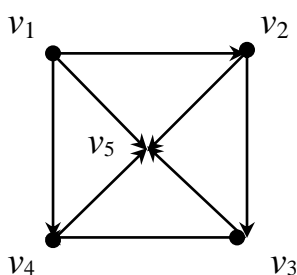
Напр.:

$$\rho^+(v_1) = 3$$

$$\rho^-(v_1) = 0$$

$$\rho^+(v_4) = 1$$

$$\rho^-(v_4) = 2$$



(!!) *Очевидно, суммы положительных и отрицательных степеней всех вершин орграфа равны между собой и равны числу всех дуг.*

Опр. Вершина, $\frac{\text{положительная}}{\text{отрицательная}}$ степень которой равна нулю, называется

$\frac{\text{СТОКОМ}}{\text{ИСТОКОМ}}$.

Так, v_1 — исток, v_5 — сток

(!!) *Концевая вершина орграфа может быть либо стоком, либо истоком.*

5.3. Ориентированные маршруты

Маршруты на орграфе определяются аналогично, с той лишь разницей, что начальная вершина каждой последующей дуги маршрута

должна совпадать с конечной вершиной предыдущей дуги. Иначе говоря, движение по маршруту допускается только в указанных направлениях (по направлению стрелок).

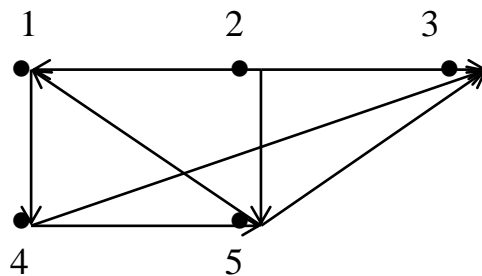
Опр. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем*, а не содержащий повторяющихся вершин, - *простым путем*.

Опр. Замкнутый путь называется *контуром*, а простой замкнутый путь – *простым контуром*.

Опр. Орграф, содержащий хотя бы один контур, называется *контурным*.

Задачи, связанные с маршрутами в орграфе, имеют большое практическое значение. Наиболее часто встает вопрос о минимальных и максимальных расстояниях и о числе маршрутов определенной длины.

ПР. Дан орграф. Сколько в нем маршрутов длины 3? (8)

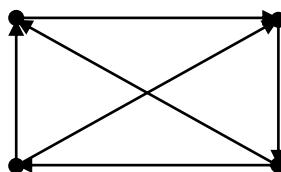
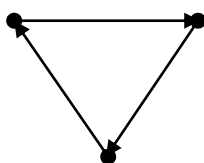


5.4. Связность орграфов

Связность орграфов определяется так же, как и для неориентированных (без учета направлений дуг). Специфичным для орграфа является понятие сильной связности.

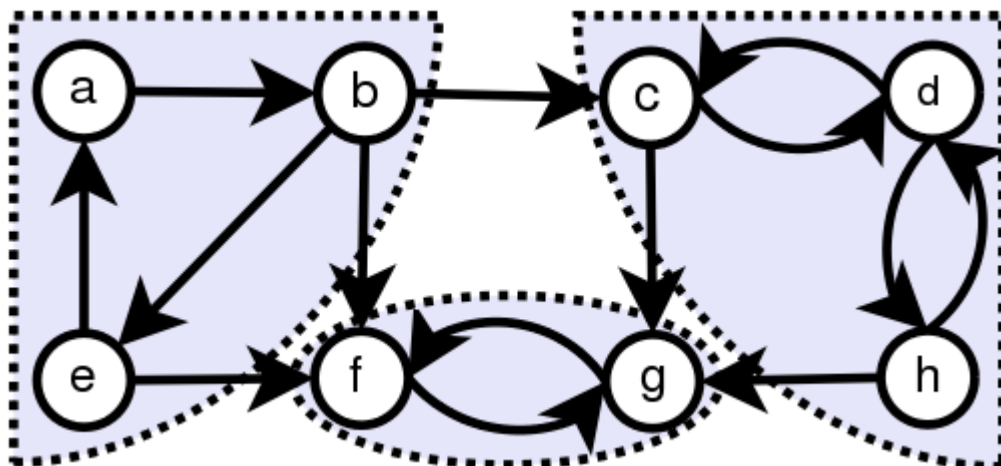
Опр. Орграф называется *сильно связным*, если для любой пары вершин существует путь из одной вершины в другую и обратно.

Напр.:



Опр. *Компонентами сильной связности* орграфа называются его максимальные по включению сильно связанные подграфы.

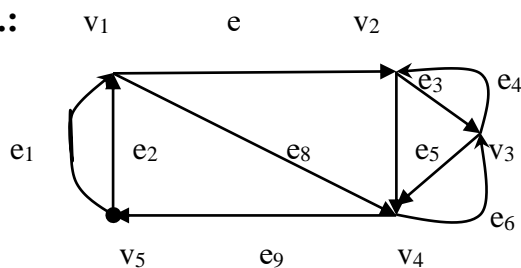
На данном примере изображен орграф, для которого найдены все три компоненты сильной связности (закрашенные области, обведенные пунктиром).



5.5. Матрица смежности орграфа

Каждую дугу орграфа e_k представляют как упорядоченную пару вершин $(v_i; v_j)$, при этом $(i; j)$ - элемент матрицы смежности равен числу дуг, направленных от вершины v_i к вершине v_j .

Напр.:



v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
	1		1		v_1
		1	1		v_2
	1		1		v_3
		1		1	v_4
2					v_5

(!!) Матрица смежности орграфа, в общем случае, несимметрична. Петлям соответствуют единицы на главной диагонали. Нулевая строка и нулевой столбец с тем же номером соответствуют изолированной вершине.

5.6. Матрица инцидентности орграфа

В случае орграфа ненулевой элемент матрицы инцидентности равен $+1$, если v_i – начальная вершина дуги e_j , и равен -1 , если v_i – конечная вершина дуги e_j . В клетке, соответствующей петле, ставится ± 1 .

Напр.: Матрица смежности для приведенного выше орграфа имеет вид:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	
-1	-1					1	1		v_1
		1	-1			-1			v_2
		-1	1	1	-1				v_3
				-1	1		-1	1	v_4
1	1							-1	v_5

5.7. Графы и бинарные отношения

Пусть на множестве X задано бинарное отношение R . Ему соответствует ориентированный граф, вершины которого изображают элементы из X , а дуга $(x_i; x_j)$ существует тогда и только тогда, когда $x_i R x_j$.

Если имеют место соотношения $x_i R x_j$ и $x_j R x_i$, то вершины связываются 2-мя нестрогими параллельными дугами, которые можно заменить ребром. Таким образом, симметричному отношению соответствует неориентированный граф.

Соотношению $x_i R x_i$ соответствует петля, выходящая из x_i и входящая в ту же вершину. Значит, если R рефлексивно, то соответствующий граф имеет петли во всех вершинах.

Если R транзитивно, то в графе для каждой пары рёбер $(x_i; x_j)$ и $(x_j; x_k)$ имеется замыкающее ребро $(x_i; x_k)$.

Если бинарное отношение $x R y$ устанавливает связь между элементами $x \in X$ и элементами $y \in Y$, то граф такого отношения будет ориентированным биграфом.

Рассмотрим теперь соответствие между операциями над отношениями и операциями над графами. Для каждого отношения R существует обратное ему отношение R^{-1} , граф которого отличается от графа отношения R тем, что направления всех дуг заменены на противоположные.

6. Деревья

6.1. Понятие дерева. Свойства свободных деревьев

Опр. Связный ациклический граф называется *деревом*.

(!!) Очевидно, что деревья не имеют петель и кратных ребер, т.е. являются простыми графами.

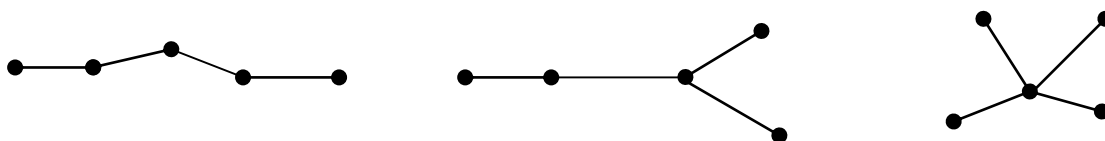
Среди различных деревьев выделяют 2 важных частных случая:

- 1) *Последовательное дерево*, представляющее собой простую цепь.
- 2) *Звездное дерево*, в котором одна из вершин смежна со всеми остальными вершинами.

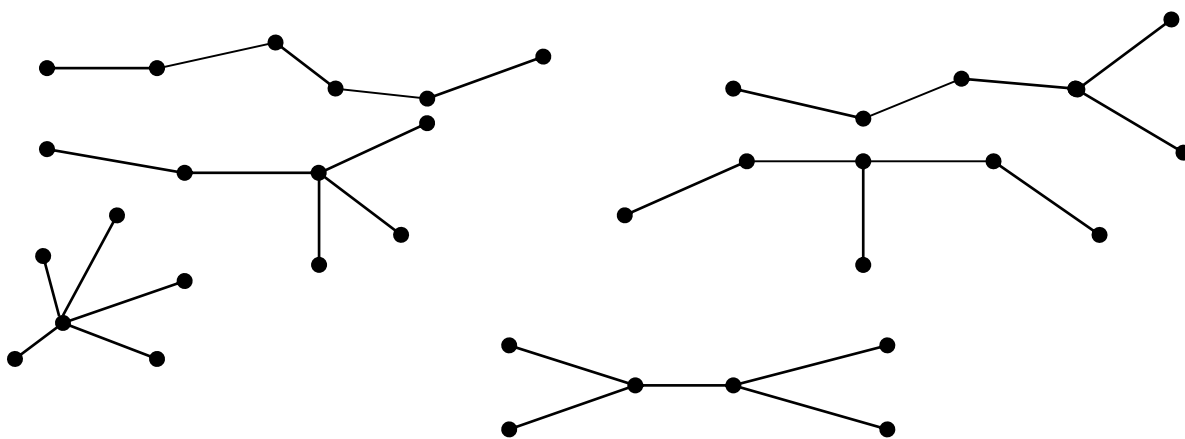
Пр. а) Различные свободные деревья с 4-мя вершинами:



б) Различные свободные деревья с 5-ю вершинами:



в) Различные свободные деревья с 6-ю вершинами:



Очевидно:

- 1) Для каждой пары вершин дерева существует единственная соединяющая их простая цепь.
- 2) Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q = p - 1$ ребер.
- 3) Любое ребро дерева является мостом.
- 4) В любом дереве имеются, по крайней мере, 2 концевые вершины.
- 5) При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которых представляет собой также дерево или изолированную вершину.

Опр. Несвязный граф, компонентами которого являются деревья, называется *лесом*.

(!!) Лес из k деревьев, содержащий p вершин, имеет в точности $p - k$ ребер.

Опр. *Остовным деревом (остовом, каркасом или скелетом)* неориентированного графа G называется его подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

Ребра графа, не входящие в остов, называются хордами графа относительно остова.

6.2. Дерево с корнем, ветви дерева

Если в дереве отметить некоторую вершину v_0 , то ее называют *корнем* дерева, а само дерево – *деревом с корнем*.

Обозначая вершины, смежные с вершиной v_0 соответственно v_1, v_2, \dots , с $v_1 - v_{11}, v_{12}, \dots$, а с $v_2 - v_{21}, v_{22}, \dots$ и т.д., можно построить дерево с корнем.

(!!) Очевидно, что каждая вершина дерева может служить его корнем.

Если v – вершина дерева с корнем v_0 , тогда множество всех вершин, связанных с корнем цепями, проходящими через вершину v , порождает подграф, который называется **ветвью вершины v** в дереве с корнем v_0 . Очевидно, что эта ветвь связна и сама является деревом с корнем в этой вершине v .

6.3. Типы вершин и центры деревьев

Пусть дано конечное дерево G . Все его концевые вершины называются **вершинами типа 1**. Если удалить из графа все такие вершины вместе с инцидентными им ребрами, то получится подграф G' , который будет деревом. Концевые вершины дерева G' называются **вершинами типа 2** в дереве G . Аналогично определяются вершины типов 3, 4, и т.д.

Ясно, что в конечном дереве G имеются вершины лишь конечного числа типов.

Опр. Вершины максимального типа называются **центрами дерева**.

(!!) Дерево имеет либо 1, либо 2 центра.

Опр. Каждая цепь, соединяющая центр дерева с его концевой вершиной, называется **радиальной**, а цепь, соединяющая две концевые вершины дерева и проходящая через его центр или оба центра (если их два), – **диаметральной цепью**.

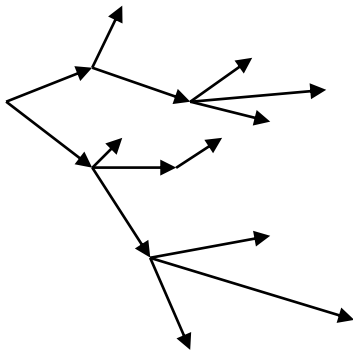
(!!) Если в дереве $\frac{1 \text{ центр}}{2 \text{ центра}}$, то длина диаметральной цепи равна $\frac{2k-2}{2k-1}$,

где k – максимальный тип вершин дерева.

6.4. Ориентированное дерево

Опр. Ориентированное дерево называется **прадеревом с корнем v_0** , если существует путь между вершиной v_0 и любой другой его вершиной.

(!!) *Прадерево имеет единственный корень, и все ребра в нем имеют направление от корня. При этом в каждую вершину ордерова входит только одно ребро.*



Опр. Концевая вершина ордерова называется *листом*.

Опр. Путь из корня в лист называется *ветвью*.

Опр. Длина наибольшей ветви ордерова называется его *высотой*.

Опр. *Уровнем вершины* ордерова называется расстояние от корня до этой вершины. Вершины одного уровня образуют *ярус* дерева.

(!!) *Корень имеет уровень равный 0.*

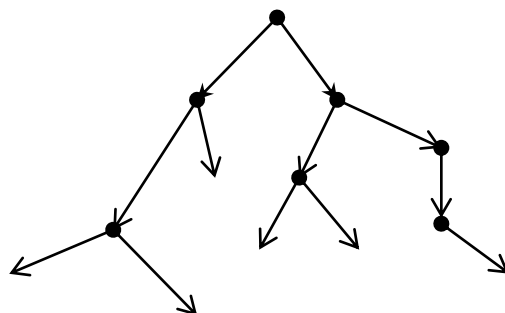
Опр. Если изменить направления всех ребер ордерова на противоположные (к корню), то получится орграф, который называется *сетью сборки*.

6.5. Бинарные деревья

Опр. *Бинарным (двоичным) деревом* называется ориентированное дерево, в котором каждая вершина (узел) имеет не более двух потомков.

Бинарное дерево имеет корень и два непересекающихся подмножества, каждое из которых само является бинарным деревом. Эти подмножества называются правым и левым поддеревьями исходного дерева.

Напр.:

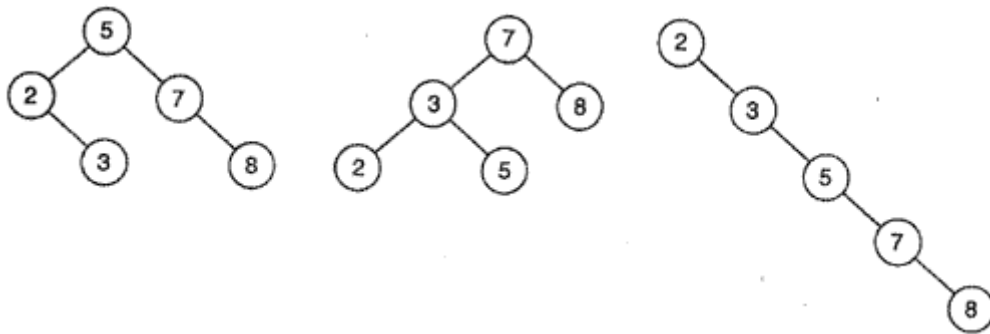


Для практических целей, обычно, используют два подвида бинарных деревьев: двоичное дерево поиска и двоичная куча.

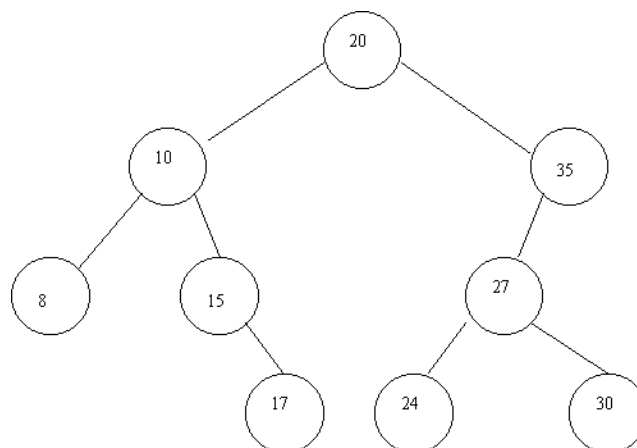
Опр. Двоичное дерево называется *двоичным деревом поиска*, если его элементы расположены так, что для каждого элемента n все элементы в левом поддереве n будут меньше, чем n , а все элементы в правом поддереве - больше, чем n .

В общем случае существует огромное число двоичных деревьев поиска (различной формы) для любого заданного набора элементов.

Напр.: Три двоичных дерева поиска с одним и тем же набором элементов (2, 3, 5, 7, 8)



Пр. Предположим, что нужно сформировать двоичное дерево, узлы (элементы) которого имеют следующие значения признака: 20, 10, 35, 15, 17, 27, 24, 8, 30. В этом же порядке они и будут поступать для включения в двоичное дерево.

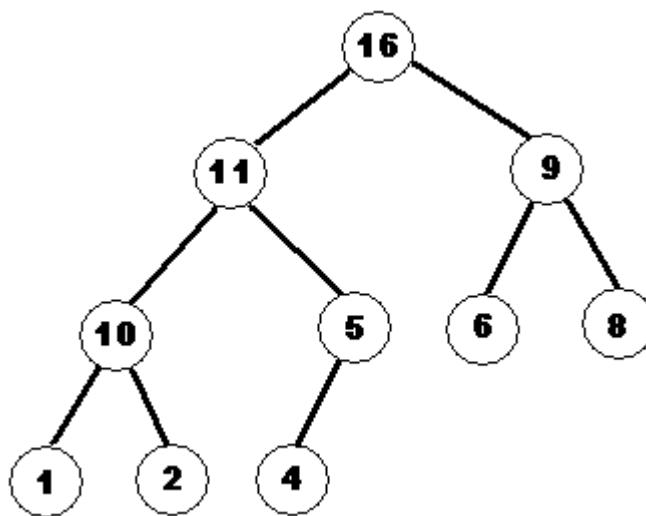


Опр. *Двоичная куча (пирамида)* - это такое двоичное дерево, для которого выполнены три условия:

- Значение в любой вершине больше, чем значения ее потомков.
- Все слои, кроме, может быть, последнего, заполнены полностью.
- Последний слой заполняется слева направо.

Пусть структура данных для хранения двоичной кучи имеет вид

16	11	9	10	5	6	8	1	2	4
----	----	---	----	---	---	---	---	---	---



Существуют также кучи, где значение в любой вершине, наоборот, меньше, чем значения ее потомков.

7. Взвешенные графы. Раскраска графов

Часто, особенно когда графы используются для моделирования реальных систем, их вершинам, или ребрам, или и тем, и другим приписываются некоторые числа. Природа этих чисел может быть самая разнообразная. Например, если граф представляет собой модель железнодорожной сети, то число, приписанное ребру, может указывать длину перегона между двумя станциями, или наибольший вес состава, который допустим для этого участка пути, или среднее число поездов, проходящих через этот участок в течение суток и т.п. Что бы ни означали эти числа, сложилась традиция называть

их весами, а граф с заданными весами вершин и ребер - **взвешенным графом**.

В графе можно взвесить вершины таким образом, что каждой вершине будет сопоставлено целое число. Если числа трактовать как номера краски, то такое взвешивание вершин называют **вершинной раскраской графа**.

Раскраска называется **правильной**, если никакие смежные вершины не окрашены в один цвет.

Раскраска графа, в которой используется минимальное число красок, называется **минимальной**. Число красок минимальной раскраски является одной из характеристик графа и называется **хроматическим числом**. Так, например, хроматическое число биграфа равно 2. Двум равно и хроматическое число любого дерева. Дерево – биграф?

С задачей определения минимальной раскраски графа связана известная проблема четырех красок: «Пусть имеется географическая карта. Можно ли, используя только 4 краски, изобразить эту карту так, чтобы соседние страны (имеющие общую границу) были окрашены в разный цвет?» (В соответствующем графе вершинами являются страны, а смежными вершинами являются соседние страны. После 1976 года ответ на этот вопрос является положительным.)

В теории графов ставится часто вопрос о **реберной раскраске графов**. Какое минимальное число цветов (это число иногда называют реберно-хроматическим) нужно, чтобы раскрасить ребра графа так, что любые 2 ребра, имеющие общую вершину, были бы окрашены в разный цвет? Для реберно-хроматического числа графа верна следующая теорема Визинга: Если в графе максимальная степень вершин равна r , то реберно-хроматическое число равно либо r , либо $r + 1$.

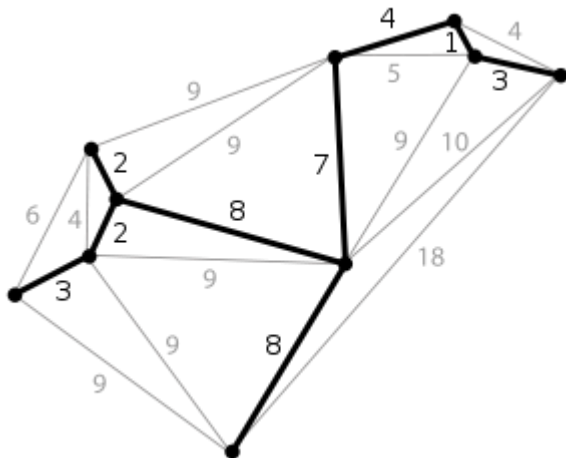
Опр. *Минимальное остовное дерево* в связанном, взвешенном, неориентированном графе - это остовное дерево этого графа, имеющее мини-

мальный возможный вес, где под весом дерева понимается сумма весов входящих в него ребер.

Задача о нахождении минимального остовного дерева часто встречается в подобной постановке: допустим, есть n городов, которые необходимо соединить дорогами, так, чтобы можно было добраться из любого города в любой другой (напрямую или через другие города). Разрешается строить дороги между заданными парами городов и известна стоимость строительства каждой такой дороги. Требуется решить, какие именно дороги нужно строить, чтобы минимизировать общую стоимость строительства.

Эта задача может быть сформулирована в терминах теории графов как задача о нахождении минимального остовного дерева в графе, вершины которого представляют города, ребра - это дороги, которые можно проложить напрямую между двумя городами, а вес ребра равен стоимости строительства соответствующей дороги.

Напр.:



8. Приложения теории графов в различных областях науки и техники

8.1. Графы и информация

Двоичные деревья играют весьма важную роль в теории информации. Предположим, что определенное число сообщений требуется закодировать в виде конечных последовательностей различной длины, состоящих из нулей и единиц. Если вероятности кодовых слов заданы, то наилучшим считается

код, в котором средняя длина слов минимальна по сравнению с прочими распределениями вероятности. Задачу о построении такого оптимального кода позволяет решить алгоритм Хаффмана.

Двоичные кодовые деревья допускают интерпретацию в рамках теории поиска. Каждой вершине при этом сопоставляется вопрос, ответить на который можно либо "да", либо "нет". Утвердительному и отрицательному ответу соответствуют два ребра, выходящие из вершины. "Опрос" завершается, когда удастся установить то, что требовалось.

Таким образом, если кому-то понадобится взять интервью у различных людей, и ответ на очередной вопрос будет зависеть от заранее неизвестного ответа на предыдущий вопрос, то план такого интервью можно представить в виде двоичного дерева.

8.2. Графы и химия

Еще А. Кэли рассмотрел задачу о возможных структурах насыщенных (или предельных) углеводородов.

Все атомы углеводорода четырехвалентны, все атомы водорода одновалентны. Молекула каждого предельного углеводорода представляет собой дерево. Если удалить все атомы водорода, то оставшиеся атомы углеводорода также будут образовывать дерево, каждая вершина которого имеет степень не выше 4. Следовательно, число возможных структур предельных углеводородов, т. е. число гомологов данного вещества, равно числу деревьев с вершинами степени не больше четырех.

Таким образом, подсчет числа гомологов предельных углеводородов также приводит к задаче о перечислении деревьев определенного типа. Эту задачу и ее обобщения рассмотрел Д. Пойа.

8.3. Графы и биология

Деревья играют большую роль в биологической теории ветвящихся процессов. Для простоты мы рассмотрим только одну разновидность ветвя-

щихся процессов - размножение бактерий. Предположим, что через определенный промежуток времени каждая бактерия либо делится на две новые, либо погибает. Тогда для потомства одной бактерии мы получим двоичное дерево.

Нас будет интересовать лишь один вопрос: в скольких случаях n -е поколение одной бактерии насчитывает ровно k потомков? Рекуррентное соотношение, обозначающее число необходимых случаев, известно в биологии под названием процесса Гальтона-Ватсона. Его можно рассматривать как частный случай многих общих формул.

8.4. Графы и физика

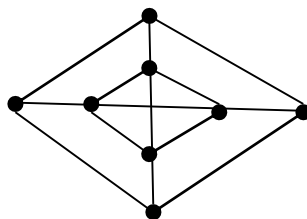
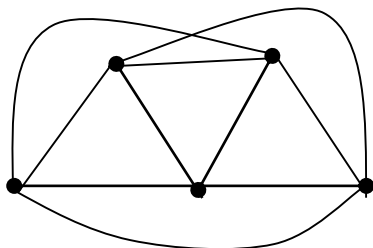
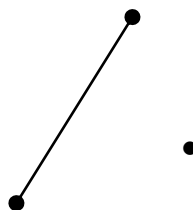
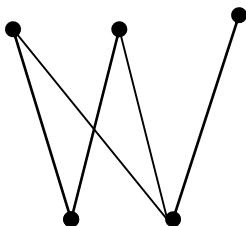
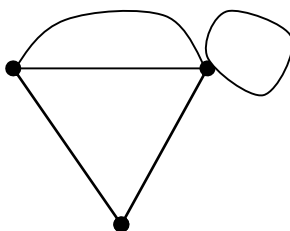
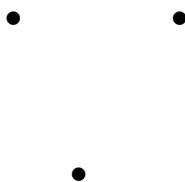
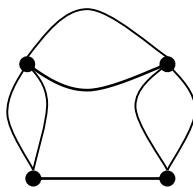
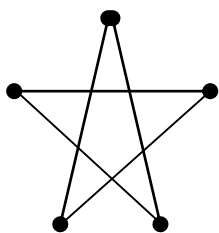
Еще недавно одной из наиболее сложных и утомительных задач для радиолюбителей было конструирование печатных схем.

Печатной схемой называют пластинку из какого-либо диэлектрика (изолирующего материала), на которой в виде металлических полосок вытравлены дорожки. Пересекаться дорожки могут только в определенных точках, куда устанавливаются необходимые элементы (диоды, триоды, резисторы и другие), их пересечение в других местах вызовет замыкание электрической цепи.

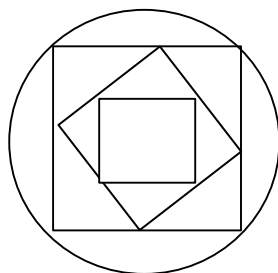
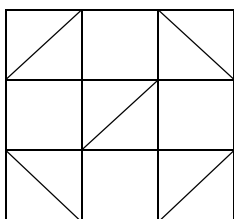
В ходе решения этой задачи необходимо вычертить плоский граф, с вершинами в указанных точках.

Задания для самостоятельного решения

1. Определите типы графов:



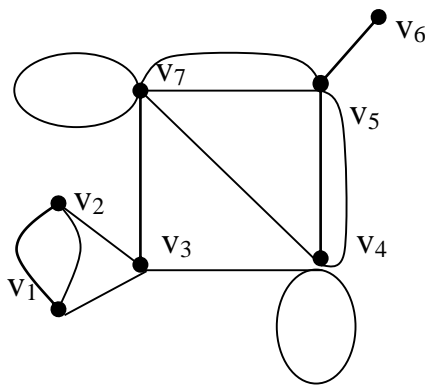
2. Нарисуйте фигуру, не отрывая руки:



3. Постройте граф, соответствующий данной матрице смежности:

		1	2	1	
	2			1	
1			2		
2		2		1	
1	1		1	2	1
				1	

- 1) Охарактеризуйте полученный граф.
 - 2) Найдите степени всех его вершин.
 - 3) Найдите в нем точки сочленения и мосты, если они есть.
 - 4) Запишите для него матрицу инцидентности.
4. Дан граф:



- 1) Постройте:
 - часть графа, состоящую из 4 вершин и 3 ребер;
 - суграф с 5 ребрами.
 - 2) Найдите какой-либо маршрут длины 5, 6, 7, 8, 9 и 10 между вершинами v_4 и v_2 .
Какова наименьшая длина такого маршрута?
5. Постройте граф, соответствующий данной матрице смежности:

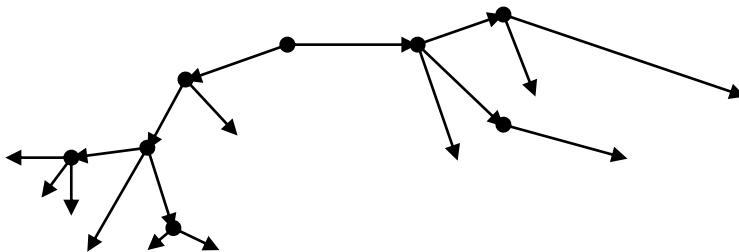
1		1			
			1	1	
		1			2
2		1			
			1		1
	1			1	

1) Определите все имеющиеся в нем виды маршрутов.

2) Найдите степени его вершин

6. Во множестве $N = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ задано бинарное отношение $R = \{(1; 2); (1; 4); (1; 5); (2; 3); (3; 2); (3; 4); (4; 4); (4; 5); (5; 3); (5; 4)\}$. Для данного отношения запишите область определения и область значений. Нарисуйте граф этого отношения. Составьте для него матрицу смежности и инцидентности.

7. Представьте ордерено в ярусном виде, обозначив его вершины соответствующим образом. Найдите листья, вершины всех ярусов, высоту дерева.



Контрольные вопросы

- 1) Дайте понятие графа.
- 2) Какие ребра называются кратными?
- 3) Что такое петля?
- 4) Какие две вершины называются смежными?
- 5) Какая вершина называется изолированной?
- 6) Объясните, что означает инцидентность вершин и ребер.
- 7) Дайте понятие нуль-графа.
- 8) Какой граф называется простым?
- 9) Дайте понятие полного графа.
- 10) Определите биграф.
- 11) Какой граф называется мультиграфом?
- 12) Дайте определение псевдографа.
- 13) Что означает степень вершины?
- 14) Какие существуют типы вершин в зависимости от четности их степени?
- 15) Какая вершина называется концевой?
- 16) Чему равна степень изолированной вершины?
- 17) Дайте понятие однородного графа.
- 18) Какие два графа называются изоморфными? Объясните, как проверить изоморфность графов.
- 19) Какой граф называется плоским?
- 20) Какой граф является планарным?
- 21) Дайте определение части графа.
- 22) Какая часть графа называется подграфом?
- 23) Что такое суграф?
- 24) Какие операции можно выполнять с частями графа? Определите каждую из них.
- 25) Дайте понятие маршрута длины m .

- 26) Какой маршрут называется цепью? простой цепью?
- 27) Дайте понятие замкнутого маршрута.
- 28) Что такое цикл? простой цикл?
- 29) Какой граф называется циклическим? ациклическим?
- 30) Дайте понятия эйлерового цикла и эйлеровой цепи.
- 31) Какой граф называется эйлеровым?
- 32) Какой цикл называется гамильтоновым?
- 33) Какие две вершины называются связанными?
- 34) Дайте определения связного и несвязного графов.
- 35) Какой граф называется разделимым?
- 36) Дайте понятие точки сочленения.
- 37) Какое ребро графа называется мостом?
- 38) Дайте понятие матрицы смежности.
- 39) Что представляет собой матрица инцидентности?
- 40) Как составляется список ребер?
- 41) Как называется направленное ребро?
- 42) Дайте понятие ориентированного графа.
- 43) Какие кратные дуги называются строго параллельными? нестрого параллельными?
- 44) Какой граф называется смешанным?
- 45) Как превратить неориентированный граф в ориентированный?
- 46) Дайте понятие графа, обратного данному.
- 47) Что понимают под положительной и отрицательной степенью вершины?
- 48) Что показывает сумма положительных (отрицательных) степеней всех вершин?
- 49) В чем состоит отличие ориентированного маршрута от неориентированного?
- 50) Дайте определения пути и простого пути.
- 51) Что такое контур? простой контур?

- 52) Какой граф называется контурным?
- 53) Определите понятие сильной связности орграфа.
- 54) Каковы особенности матрицы смежности орграфа?
- 55) Сформулируйте правило написания матрицы инцидентности орграфа.
- 56) Какой граф соответствует симметричному бинарному отношению?
- 57) В чем особенность графа, соответствующего рефлексивному бинарному отношению?
- 58) Какой граф называется деревом?
- 59) Что значит последовательное дерево? звездное дерево?
- 60) Сформулируйте свойства деревьев.
- 61) Что такое остовное дерево неориентированного графа?
- 62) Дайте понятие леса.
- 63) Какая вершина дерева может служить его корнем?
- 64) Определите ветвь вершины v у дерева с корнем v_0 .
- 65) Дайте определение центра дерева. Сколько центров может быть у дерева? Как найти центра дерева?
- 66) Дайте понятия радиальной и диаметальной цепи в дереве.
- 67) Какое дерево называют прадеревом с корнем?
- 68) Определите лист, ветвь, уровень вершины и ярус прадерева.
- 69) Как определить высоту прадерева?
- 70) Дайте определение бинарного дерева.
- 71) Как составляется двоичное дерево поиска? двоичная куча?
- 72) Что понимают под взвешенным графом?
- 73) Поясните, что такое хроматическое число графа? Каково хроматическое число дерева? биграфа?