

Министерство образования, науки и молодежной политики Краснодарского края

ГБПОУ КК «Армавирский машиностроительный техникум»

Учебное пособие

ОСНОВЫ

теории вероятностей

Раздел 2. Случайные величины

для студентов специальности 09.02.07
«Информационные системы и программирование»

Содержание

1.	Понятие случайной величины. Виды случайных величин	4
2.	Дискретные случайные величины	5
2.1.	Закон распределения ДСВ. Ряд распределения	5
2.2.	Многоугольник распределения	6
2.3.	Понятие функции распределения случайной величины	6
3.	Числовые характеристики дискретных случайных величин	7
3.1.	Мода и медиана ДСВ	7
3.2.	Математическое ожидание и его свойства	9
3.3.	Дисперсия ДСВ и ее свойства. Среднеквадратичное отклонение	10
4.	Основные виды распределения ДСВ	12
4.1.	Равномерные распределения	12
4.2.	Биномиальные распределения. Распределения Пуассона	12
4.3.	Гипергеометрические распределения	14
4.4.	Геометрические распределения	15
5.	Непрерывные случайные величины	15
5.1.	Интегральная функция распределения НСВ, ее свойства	16
5.2.	Плотность распределения вероятности, ее свойства	17
6.	Числовые характеристики НСВ	19
6.1.	Мода и медиана НСВ	19
6.2.	Математическое ожидание НСВ	20
6.3.	Дисперсия и среднеквадратичное отклонение НСВ	20
7.	Некоторые виды распределения НСВ, их числовые характеристики	21
7.1.	Равномерные распределения	21
7.2.	Показательные распределения	22
7.3.	Нормальные распределения	23
	Задания для самостоятельного решения	25
	Контрольные вопросы	29

1. Понятие случайной величины. Виды случайных величин

Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей. Рассмотрим некоторые примеры, разъясняющие смысл случайной величины.

При последовательном бросании монеты несколько раз число появлений «орла» является переменной величиной, принимающей значения 0, 1, 2,... в зависимости от случайных обстоятельств.

Интервал времени между двумя последовательными появлениями автобуса на данной остановке также является переменной величиной, подверженной различным колебаниям в зависимости от многих причин, учесть которые мы не в состоянии.

Рассматриваемая в этих примерах переменная величина обладает характерной особенностью. Хотя мы можем указать область ее возможных значений, однако мы не можем заранее знать, какое конкретное значение примет эта переменная величина, так как оно зависит от случая и меняется от испытания к испытанию.

Опр. *Случайной величиной* называется такая переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное числовое значение (не известное заранее, но обязательно одно).

Обозначение: X, Y, Z, \dots (возможно с индексами) – случайные величины; x, y, z, \dots – значения случайной величины

(!!) *Очевидно, что значение случайной величины есть ни что иное, как случайное событие.*

Опр. Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее значений конечно или счетно.

Напр.:

1) X – «число выпавших очков при бросании кубика»

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6$$

2) Y – «количество солнечных дней в году»

$$y_1 = 0, y_2 = 1, \dots, y_{366} = 365 \text{ (для не високосного года)}$$

3) Z – «число бракованных изделий в определенной партии»

Опр. Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее значений образует конечный или бесконечный интервал.

Напр.:

1) X – «Время безаварийной работы станка»

2) Z – «дальность полета артиллерийского снаряда»

2. Дискретные случайные величины

2.1. Закон распределения ДСВ. Ряд распределения

Для полной характеристики случайной величины необходимо знать не только те значения, которые она принимает, но и то, с какой вероятностью она принимает то или иное значение.

Вероятность того, что случайная величина X принимает значение x, обозначают $p(X = x)$.

Опр. Соответствие между возможными значениями случайной величины X и их вероятностями называется *законом распределения* случайной величины X.

Закон распределения ДСВ может быть представлен таблицей, первая строка которой содержит возможные значения x_i , а вторая – вероятности p_i :

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Очевидно, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Такая таблица называется *рядом распределения*.

ПР. В партии из 8 деталей 5 стандартных. Наудачу взяты 4 детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

/ Пусть X – «число стандартных деталей среди отобранных», тогда

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$$

$$p(x_1) = p(X = 1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^3}{C_8^4} = \frac{1}{14},$$

$$p(x_2) = p(X = 2) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_8^4} = \frac{6}{14},$$

$$p(x_3) = p(X = 3) = \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} = \frac{6}{14},$$

$$p(x_4) = p(X = 4) = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14}.$$

Искомый ряд распределения имеет вид:

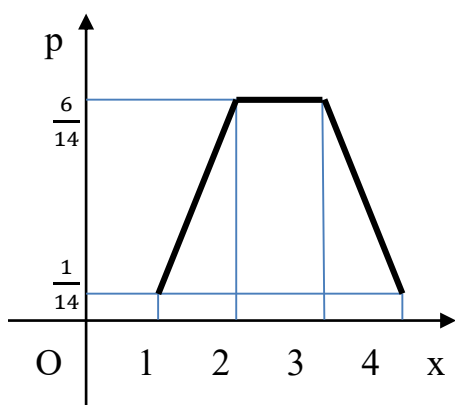
X	1	2	3	4
p	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

 /

2.2. Многоугольник распределения

Закон распределения можно задать графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие вероятности этих значений. Соединив точки $(x_i; p_i)$ последовательно отрезками, получают ломанную, которую называют **многоугольником распределения вероятностей**.

Построим многоугольник распределения для предыдущего примера.



2.3. Понятие функции распределения случайной величины

Опр. Функция $F(x)$, задающая вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x , называется **функцией распределения случайной величины (интегральной функцией распределения)**.

Т. о.:

$$F(x) = p(X < x)$$

В левой части этого равенства находится «обыкновенная» функция действительного аргумента, а в правой – переменная вероятность. Поэтому

эта формула является своеобразным «мостом» между математическим анализом и теорией вероятностей и дает возможность использовать аппарат мат. анализа при исследовании в ТВ.

Для ДСВ значения функции $F(x)$ можно найти по формуле:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i)$$

Напр.: Построим функцию распределения случайной величины X из ранее рассмотренного примера

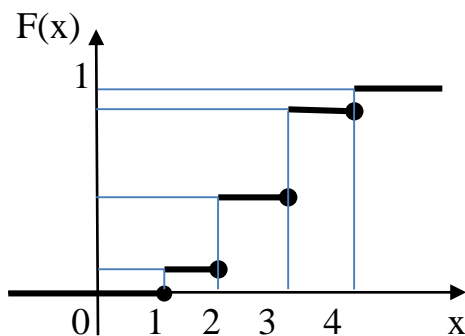
При $x \leq 1$ $F(x) = p(X < 1) = 0$

При $1 < x \leq 2$ $F(x) = \frac{1}{14}$

При $2 < x \leq 3$ $F(x) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$

При $3 < x \leq 4$ $F(x) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$

При $x > 4$ $F(x) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} + \frac{6}{14} + \frac{1}{14} = 1$



Из рис. видно, что $F(x)$ имеет 4 скачка по числу принимаемых случайной величиной X значений. Величина скачка равна вероятности значения случайной величины в этой точке.

3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

3.1. Мода и медиана ДСВ

Опр. *Модой ДСВ* называется такое ее значение, вероятность которого наибольшая.

Обозначение: $M_0(X)$

(!!) Ряд распределений может не иметь моды или иметь не одну, а несколько мод.

Моду, как характеристику ДСВ, часто используют в социологических исследованиях, например, при определении рейтинга популярности того или иного политического деятеля или певца. При этом в качестве ДСВ выступает число голосов, отданных за любимого певца при опросе. Результат такого социологического исследования может быть использован, например, при составлении репертуара музыкальных радио- и телепередач, при поиске объекта для взятия интервью для прессы и т.п.

ПР. По наблюдениям метеорологов, среднесуточная температура в первой половине февраля имела следующий ряд распределения: -18, -15, -18, -18, -15, -12, -12, -5, -10, -7, -12, -18, -20, -15, -12. Составить закон распределения ДСВ – «среднесуточная температура» и найти ее моду.

/

X	-20	-18	-15	-12	-10	-7	-5
p	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

$M_{01}(X) = -18$ и $M_{02}(X) = -12$ /

Опр. Значение случайной величины, вероятность которого минимальна, называется *антимодой*.

Обозначение: $\overline{Mo(X)}$

В рассмотренном выше примере четыре антимоды.

Опр. Медианой ДСВ называется среднее по положению в пространстве событий значение ДСВ.

Обозначение: $Mc(X)$

Если ранжировать (упорядочить в порядке возрастания) ряд распределений ДСВ, то в ряду с нечетным количеством членов медиана есть значение ДСВ на «среднем месте». Номер места n вычисляется по формуле $n = \frac{N+1}{2}$, где N – количество элементов в ряду распределения. Так, в предыдущем примере $Mc(X) = -12$.

Если в ряду распределения четное число членов, то медиана вычисляется как среднее арифметическое двух значений с номерами $\frac{N}{2}$ и $\frac{N}{2} + 1$.

ПР. Учет производительности труда станочников цеха за смену задан ведомостью:

№ по списку	1	2	3	4	5	6	7	8
Производительность труда, дет./смену	52	52	53	54	56	57	57	57

Найти моду и медиану ДСВ X – «производительность труда станочников».

/ Составим ряд распределения ДСВ X :

X	52	53	54	56	57
p	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Очевидно, что $M_0(X) = 57$, $M_c(X) = 54$ /

3.2. Математическое ожидание и его свойства

Пусть имеется ДСВ X , принимающая значения x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n .

Опр. Математическим ожиданием ДСВ называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности появления этих значений, т.е.

Обозначение: $M(X)$

Т. о.:

$$M(X) = \sum x_i p_i$$

(!!) Математическое ожидание называют еще средним значением случайной величины или центром распределения

ПР. Найти математическое ожидание случайной величины X , имеющей следующий закон распределения:

X	1	2	3	4	5
p	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2

/ $M(X) = 0,3 + 0,4 + 0,3 + 0,8 + 1 = 2,8$ /

Основные свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной, т.е. $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(CX) = C M(X)$.

3. Математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ равно нулю, т.е. $M(X - M(X)) = 0$.

Поясним понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Математическое ожидание $M(X)$ – вполне определенная постоянная. В результате опыта случайная величина X принимает одно из ее возможных значений x_i . Разность $x_i - M(X)$ показывает, насколько отклонилось это значение случайной величины в данном опыте от $M(X)$. Очевидно, что эта разность сама является случайной величиной. Эту величину обозначают $X - M(X)$ и называют отклонением случайной величины X от ее математического ожидания.

3.3. Дисперсия ДСВ и ее свойства.

Среднеквадратичное отклонение

Опр. *Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

Обозначение: $D(X)$

Т. о.:

$$D(X) = M (X - M(X))^2$$

Если X является ДСВ, то, по определению математического ожидания для СВ $(X - M(X))^2$, имеем:

$$D(X) = \sum (x_i - M(X))^2 p_i$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия есть величина неотрицательная, т.е. $D(X) \geq 0$

2. Дисперсия постоянной величины равна нулю, т.е. $D(C) = 0$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии в квадрате, т.е. $D(CX) = C^2D(X)$

4. Дисперсию можно вычислить по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$\text{Действительно: } D(X) = \sum (x_i - M(X))^2 p_i = \sum (x_i^2 - 2M(X)x_i + M^2(X)) p_i = \sum x_i^2 p_i - 2M(X) \sum x_i p_i + M^2(X) \sum p_i$$

Т.к. $\sum p_i = 1$, $\sum x_i p_i = M(X)$, то $D(X) = \sum x_i^2 p_i - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$, ч.т.д.

Если случайная величина и ее математическое ожидание имеют одну и ту же размерность, то дисперсия имеет размерность квадрата величины. Чтобы избежать этого недостатка вводят понятие среднеквадратичного отклонения.

Опр. *Среднеквадратичным отклонением* случайной величины называется арифметический квадратный корень из ее дисперсии.

Обозначение: $\sigma(X)$

Т. о.:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

ПР. Найти дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины X , если она задана следующим рядом распределения:

X	2	4	7	10	12
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

/ Для удобства вычислений все результаты можно свести в таблицу:

1 способ:

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i - M(X)$	$(x_i - M(X))^2 p_i$
2	0,1	0,2	-5	$25 \cdot 0,1 = 2,5$
4	0,2	0,8	-3	$9 \cdot 0,2 = 1,8$
7	0,4	2,8	0	0
10	0,2	2	3	1,8
12	0,1	1,2	5	2,5
Σ	1	7		8,6

$M(X)$

$D(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{8,6} \approx 2,93$$

2-ой способ:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
2	0,1	0,2	4	0,4
4	0,2	0,8	16	3,2
7	0,4	2,8	49	19,6
10	0,2	2	100	20
12	0,1	1,2	144	14,4
Σ	1	7		57,6

$M(X)$

$M(X^2)$

$$D(X) = 57,6 - 7^2 = 8,6 /$$

4. Основные виды распределения ДСВ

4.1. Равномерные распределения

Пусть производится n независимых испытаний. Случайная дискретная величина X имеет равномерное распределение, если она принимает значения x_i ($i = \overline{1, n}$) с одинаковыми вероятностями $p_i = \frac{1}{n}$.

Напр.: X – «число очков, выпавших при бросании игрального кубика»

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$/ \text{ По определению: } M(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$\text{Т.к. } M(X^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6}, \text{ то}$$

$$D(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546}{36} - \frac{441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12} = 2 \frac{11}{12} /$$

4.2. Биномиальные распределения. Распределения Пуассона

Опр. Распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли, называется **биномиальным законом распределения СВ**.

ПР. Проверка качества МК показала, что из каждых ста МК имеют дефекты в среднем 25 штук.

1) Составить ряд распределения случайной величины X – «число исправных МК» из взятых наудачу шести из них.

2) Найти числовые характеристики этой СВ.

/ По условию, $n = 6, p = 0,75, q = 0,25$

$$p_6(0) = 0,25^6 \approx 0,000 \quad p_6(1) = 6 \cdot 0,75 \cdot 0,25^5 \approx 0,004$$

$$p_6(2) = C_6^2 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^4 \approx 0,033 \quad p_6(3) = C_6^3 \cdot 0,75^3 \cdot 0,25^3 \approx 0,132$$

$$p_6(4) = C_6^4 \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 \approx 0,297 \quad p_6(5) = C_6^5 \cdot 0,75^5 \cdot 0,25 \approx 0,356$$

$$p_6(6) = 0,75^6 \approx 0,178$$

Т. о., закон распределения можно представить в виде ряда:

x	0	1	2	3	4	5	6	Σ
p	0	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178	
$x \cdot p$	0	0,004	0,066	0,396	1,188	1,78	1,068	4,492
x^2	0	1	4	9	16	25	36	
$x^2 \cdot p$	0	0,004	0,132	1,188	4,752	8,9	6,408	21,384

$$D(X) \approx 21,38 - 4,5^2 = 1,13$$

$$\sigma(X) \approx \sqrt{1,13} \approx 1,06 /$$

Числовые характеристики биномиального распределения ДСВ могут быть вычислены также по формулам:

$$\boxed{M(X) = np} \quad \text{и} \quad \boxed{D(X) = npq}$$

Найдем по этим формулам числовые характеристики ДСВ X из предыдущего примера:

$$M(X) = 6 \cdot 0,75 = 4,5 \quad D(X) = 6 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 1,125$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,125} \approx 1,06$$

ПР. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна $p = 0,65$. Найти математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение общего числа попаданий, если произведено 20 выстрелов.

/ $n = 20, p = 0,65, q = 0,35$

$$M(X) = 20 \cdot 0,65 = 13 \quad D(X) = 13 \cdot 0,35 = 4,55 \quad \sigma(X) = \sqrt{4,55} \approx 2,133 /$$

Частным случаем биномиального распределения является распределение Пуассона. Такие распределения имеют место для редких событий. В

этом случае их вероятности проще вычислять не по формуле Бернулли, а приближенно по формуле Пуассона.

4.3. Гипергеометрические распределения

Эти распределения отличаются от биномиальных тем, что проводятся зависимые повторные испытания. В этом случае вероятности вычисляются по определению вероятности с помощью соединений.

ПР. В партии, состоящей из 10 МК, семь – стандартных. Контролер ОТК наудачу проверил два МК. Составить закон распределения числа обнаруженных стандартных МК и найти числовые характеристики этой СВ.

/ X – «число стандартных МК из 2-х взятых»

Возможные значения этой величины: 0, 1 и 2. Подсчитаем вероятности этих значений:

$$P(x=0) = \frac{C_7^0 \cdot C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$$

$$P(x=1) = \frac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$$

$$P(x=2) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^0}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$$

Т. о., закон распределения этой ДСВ имеет вид:

<i>X</i>	0	1	2
<i>p</i>	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

Найдем M(X) и D(X) по общей формуле:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{7}{15} + 2 \cdot \frac{7}{15} = 1,4$$

$$M(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{7}{15} + 4 \cdot \frac{7}{15} = 2\frac{1}{3} \Rightarrow D(X) = 2,33 - 1,96 = 0,37 \text{ и } \sigma(X) =$$

$$\sqrt{0,37} \approx 0,6 /$$

Существуют и другие формулы для вычисления числовых характеристики таких распределений:

$M(X) = n \cdot \frac{M}{N}$	и	$D(X) = n \cdot \frac{M}{N-1} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n}{N}\right)$
------------------------------	---	--

Решим предыдущую задачу по этим формулам:

$$M(X) = 2 \cdot \frac{7}{10} = 1,4$$

$$D(X) = 2 \cdot \frac{7}{9} \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{2}{10}\right) = \frac{28}{75} = 0,37$$

4.4. Геометрические распределения

ДСВ X имеет *геометрическое распределение*, если она принимает значения $1, 2, 3, \dots$ с вероятностями $p(X = k) = q^{k-1}p$ (т.е. вероятности образуют убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q)

Для таких ДСВ числовые характеристики вычисляются по формулам:

$$\boxed{M(X) = \frac{1}{p}} \quad \text{и} \quad \boxed{D(X) = \frac{q}{p^2}}$$

ПР. При прыжках в высоту вероятность взять планку равна 0,9. Спортсмен повторяет попытки, пока не добьется успеха. Пусть X – «число попыток» при условии, что ему дается не более 3-х попыток. Составить ряд распределения СВ X и найти ее числовые характеристики.

/ Возможные значения X – 1, 2 и 3.

Очевидно: $p(X=1) = 0,9$

$$p(X=2) = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09$$

$$p(X=3) = 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,009$$

А значит, ряд распределения имеет вид:

X	1	2	3
p	0,9	0,09	0,009

$$M(X) = \frac{1}{0,9} = 1,111$$

$$D(X) = \frac{0,1}{0,81} = 0,123$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,123} \approx 0,35 /$$

5. Непрерывные случайные величины

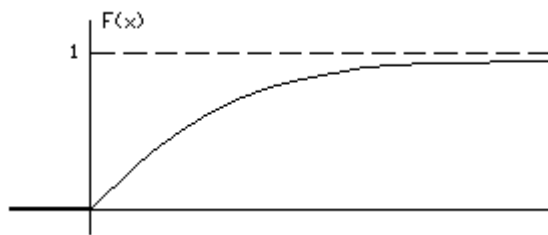
Ряд распределения можно составить лишь для ДСВ. Для НСВ, очевидно, его не построишь, т.к. невозможно занумеровать натуральными числами все ее значения. Полную вероятностную характеристику поведения НСВ дают две функции: дифференциальная и интегральная функции распределения вероятностей.

5.1. Интегральная функция распределения НСВ, ее свойства

Интегральная функция распределения НСВ определяется так же, как функция распределения для ДСВ: $F(x) = P(X < x)$.

Уже известно, что график функции $F(x)$ для ДСВ имеет столько разрывов (скачков), сколько значений принимает случайная величина X , а величина каждого скачка равна вероятности значения случайной величины в точке разрыва.

Очевидно, что по мере увеличения числа возможных значений случайной величины с одновременным уменьшением величины интервалов между ними число скачков становится больше, а сами скачки – меньше, вследствие чего ступенчатая кривая становится все более плавной, и в пределе, когда случайная величина становится непрерывной, ее функция распределения тоже становится непрерывной:



Свойства функции распределения

- 1) Ограниченная, т.е. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- 3) Неубывающая, т.е. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $F(x_1) \leq F(x_2)$.

4) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$, равна приращению функции $F(x)$ на этом промежутке, т.е. $p(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

5) Вероятность того, что НСВ примет одно определенное значение, равна 0, т.е. $p(X = x) = 0$.

ПР. Дана интегральная функция распределения вероятности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x^2, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти $p(0,25 < X < 0,5)$.

$$/ p(0,25 < X < 0,5) = 0,25 - 0,0625 = 0,1875 /$$

5.2. Плотность распределения вероятности, ее свойства

Пусть дана непрерывная и дифференцируемая на всей числовой прямой функция распределения.

Определим вероятность $p(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. Найдем среднюю вероятность $\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ и рассмотрим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$. По определению, этот предел называется производной функции $F(x)$ в точке x .

Опр. Первая производная интегральной функции распределения $F(x)$ называется *дифференциальной функцией* распределения вероятностей $f(x)$ (*плотностью распределения вероятности*).

Т. о.:

$f(x) = F'(x)$

Опр. График дифференциальной функции распределения $f(x)$ называется *кривой распределения*.

(!!) Если $F(x)$ в какой-то точке непрерывна, но не дифференцируема, то $f(x)$ в этой точке терпит разрыв.

ПР. Найти плотность распределения вероятности для последнего примера.

$$/ f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 0, \\ 2x, \text{ если } 0 < x \leq 1, \\ 0, \text{ если } x > 1. \end{cases} /$$

Свойства плотности распределения вероятностей

1) $f(x) \geq 0$, т.к. $F(x)$ неубывающая.

$$2) p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, т.к. событие $-\infty < X < +\infty$ является достоверным.

(если случайная величина принимает значения только в некотором интервале $(\alpha; \beta)$, то $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$)

Выясним теперь, как найти функцию распределения, зная плотность распределения.

Т.к. $p(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ и $F(x) = p(X < x)$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

ПР. Дано: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} \cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, \text{ если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Найдите: $F(x)$

/ При $x \leq -\frac{\pi}{2}$ $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$

При $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos x dx = 0 + \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^x$
 $= \frac{1}{2}(\sin x + 1)$

При $x > \frac{\pi}{2}$ $F(x) = 1$

Т. о.: $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1, \text{ если } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} /$

6. Числовые характеристики НСВ

6.1. Мода и медиана НСВ

Опр. *Модой НСВ* называется такое ее значение, при котором плотность вероятности максимальная.

С геометрической точки зрения, мода – значение аргумента x , при котором график дифференциальной функции распределения принимает максимальное значение. Т. о., нахождение моды – известная задача дифференциального исчисления поиска экстремума на множестве.

ПР. Найти моду НСВ, заданной дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 3x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$f'(x) = 6x; \quad 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow Mo(X) = 1$$

Опр. *Медианой НСВ* называется такое ее значение μ , для которого равновероятно, что случайная величина X больше или меньше μ , т.е.

$$P(X < \mu) = P(X > \mu) = \frac{1}{2}.$$

Т. о., в общем случае медиана есть корень алгебраического уравнения $F(x) = \frac{1}{2}$.

С геометрической точки зрения, медиана (прямая $x = \mu$) делит фигуру под графиком функции плотности вероятности на две части, имеющие одинаковые площади. Если кривая $y = f(x)$ имеет ось симметрии $x = a$, то $\mu = a$.

ПР. Найти медиану для предыдущего примера.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$x^3 = 0,5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,79$$

6.2. Математическое ожидание НСВ

Опр. Математическим ожиданием НСВ с функцией плотности $f(x)$, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a; b]$, называется определенный интеграл $\int_a^b xf(x)dx$, т.е.

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

(!!) Если возможные значения случайной величины распределены по всей оси Ox , то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

ПР. Найти математическое ожидание для той же задачи.

$$/ M(X) = \int_0^1 x3x^2dx = \dots = \frac{3}{4} /$$

6.3. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение НСВ

Определяются также как и для ДСВ:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad \text{и} \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

С учетом определения математического ожидания для НСВ получают формулы для вычисления дисперсии НСВ с плотностью распределения $f(x)$:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

Имеет место также формула: $D(X) = M(X^2) - M(X)^2$

ПР. Найти среднеквадратичное отклонение для ранее рассмотренной задачи.

$$/ D(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 3x^2dx = \dots = 0,04 \Rightarrow \sigma(X) = 0,2 /$$

ПР. Найти среднеквадратичное отклонение СВ X , заданной функцией распределения:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & \text{при } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$/ \text{Найдем } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ \frac{1}{4} & \text{при } -2 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-2}^2 xf(x)dx = \dots = 0$$

$$D(X) = \int_{-2}^2 (x - M(X))^2 f(x)dx = \dots = \frac{4}{3}$$

$$\sigma(X) \approx 1,15 \text{ /}$$

7. Некоторые виды распределения НСВ, их числовые характеристики

7.1. Равномерные распределения

Опр. НСВ называется *равномерно распределенной на интервале $[a; b]$* , если ее плотность вероятности равна некоторой константе на этом интервале и нулю вне его, т.е. $f(x) = \begin{cases} C & \text{при } x \in [a; b] \\ 0 & \text{при } x \notin [a; b] \end{cases}$.

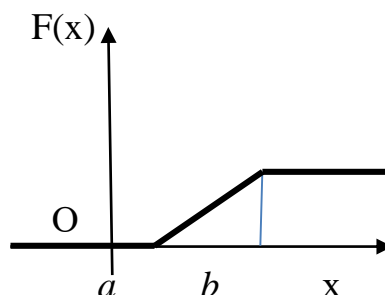
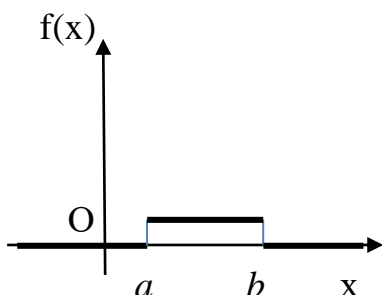
По свойству плотности распределения должно выполняться равенство $\int_a^b C dx = 1$, откуда получаем $C = \frac{1}{b-a}$.

$$\text{Т. о.: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a; b] \\ 0 & \text{при } x \notin [a; b] \end{cases}.$$

А значит, функция распределения вероятностей равномерного распределения на отрезке $[a; b]$ случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}.$$

Графики плотности вероятностей и функции распределения вероятностей для равномерного распределения имеют вид:



Вычислим числовые характеристики равномерно распределенной на отрезке случайной величины X .

$$M(X) = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

Т. о.:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

Проведя аналогичные выкладки, получают формулу для дисперсии:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

А значит:

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

ПР. НСВ X задана функцией распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ A(x+2) & \text{при } -2 < x \leq 3. \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Найти: 1) вероятность того, что в результате испытания X примет значение в интервале $(0; 2)$; 2) плотность вероятности $f(x)$; 3) числовые характеристики НСВ X .

/ Найдём A .

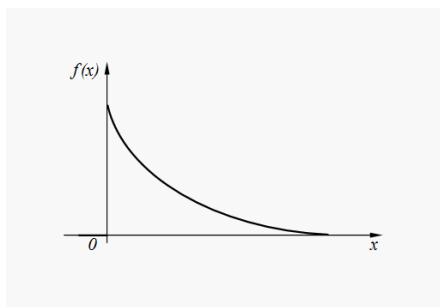
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ A & \text{при } -2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } x > 3 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$\text{Найдём } P(0 < x < 2) = F(2) - F(0) = \dots = \frac{2}{5}$$

$$M(X) = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad D(X) = \frac{25}{12} \quad \sigma(X) = \frac{5}{2\sqrt{3}} /$$

7.2. Показательные распределения

НСВ имеет **показательное распределение**, если ее плотность вероятности имеет вид: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \in [0; +\infty) \\ 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$.



Можно показать, что функция распределения вероятностей в случае показательного распределения имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \in [0; +\infty) \\ 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$.

Очевидно, что случайная величина, имеющая показательный закон распределения, может принимать только положительные значения. В качестве модели, описывающей показательное распределение, рассматривают интервалы времени между какими-то последовательными событиями.

Формулы для вычисления числовых характеристик таких СВ просты:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

7.3. Нормальные распределения

Нормальный закон возникает в тех случаях, когда случайная величина X зависит от многих факторов, т.е. случайная величина X есть сумма большого числа случайных величин, распределенных по произвольному закону, но каждая из них не является доминирующей. Так, ошибка, возникающая при различных измерениях (длины, объема, массы и т.п.) является нормальным распределением НСВ.

НСВ X имеет **нормальное распределение вероятностей (распределение Гаусса)**, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

где m и σ – параметры распределения, $-\infty < m < +\infty$ и $\sigma > 0$.

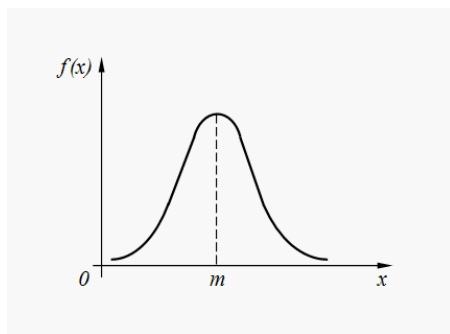
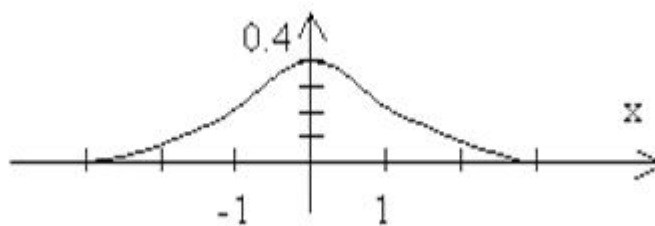


График плотности вероятности симметричен относительно прямой $x = m$, и при $x = m$ достигается максимум этой функции.

При $\sigma = 1$ и $m = 0$ нормальное распределение называют **стандартным**, его плотность вероятности и функция распределения имеют вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



Определения математического ожидания и дисперсии приводят к вычислению соответствующих интегралов, что дает формулы:

$$M(X) = m$$

$$D(X) = \sigma^2$$

$$\sigma(X) = \sigma$$

Т. о., смысл параметров нормального распределения заключается в том, что m – есть математическое ожидание, а σ – среднеквадратичное отклонение случайной величины. При этом величины параметров нормального распределения непосредственно влияют на форму кривой $f(x)$. С увеличением σ максимальное значение функции уменьшается, и кривая становится более полой, приближаясь к оси Ox . Величина a влияет на расположение кривой относительно оси ординат: при возрастании a кривая смещается вправо, при убывании - влево.

Задания для самостоятельного решения

1. Случайная величина X принимает только целые значения 1, 2, ..., 10. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X=k) = ck$. Найдите значение константы c и вероятность $P(X < 2)$.

2. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	-1	1	2	4	6
p	0,18	0,27	0,12	0,32	?

а) Найдите недостающее значение вероятности.

б) Постройте многоугольник распределения.

в) Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график.

3. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	3	4	5
p	0.3	0.2	0.5

Найдите математическое ожидание $M(X)$.

4. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	1	2	3
p	0.1	0.3	0.6

Найдите дисперсию $D(X)$.

5. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	4	8	11	14	18
p	0.1	0.25	0.3	0.25	0.1

Найдите $M(X)$, $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение σ .

6. Закон распределения случайной величины задан таблицей:

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Найдите медиану, моду, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

7. Найдите числовые характеристики ДСВ X , заданной рядом распределения:

X	2	5	8	19
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

8. Для данного баскетболиста вероятность попадания мяча в кольцо равна 0,8. X – число попаданий в серии из пяти бросков. Составьте закон распределения ДСВ X и найдите все ее числовые характеристики.

9. Баскетболист бросает мяч до первого попадания. Вероятность попадания равна 0,8. X – число бросков, если имеется пять попыток. Составьте закон распределения ДСВ X и найдите все ее числовые характеристики.

10. Среди десяти баскетболистов семеро имеют рост более 2 метров. На площадке играют пять человек. X – число низкорослых баскетболистов на площадке. Составьте закон распределения ДСВ X и найдите все ее числовые характеристики.

11. СВ X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0; 1).

12. Задана плотность вероятности НСВ X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0,5; 1).

13. Функция плотности вероятности СВ X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 4, \\ \frac{C}{x^3}, & \text{если } x \geq 4. \end{cases}$$

Найдите константу C и вероятность $p(X < 5)$.

14. СВ задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}, & \text{если } -\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}, \\ 1, & \text{если } x \geq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Найдите дифференциальную функцию распределения $f(x)$ и постройте ее график.

15. Найдите интегральную функцию распределения $F(x)$ и постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$, если СВ задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{(x-3)^2}{9}, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

16. НСВ X задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ x - 1 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ -x + 3 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найдите $M(X)$.

17. Найдите дисперсию НСВ, заданной дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ 3x^2 & \text{при } -1 < x \leq 0. \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

18. Найдите числовые характеристики случайной величины X , заданной функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ 1 - x^4 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

19. Найдите числовые характеристики НСВ, равномерно распределенной в интервале $(1; 4)$. 3 б

20. Напишите дифференциальную и интегральную функции распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$. Найдите числовые харак-

теристики этого распределения, а также вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0,4; 1)$.

21. СВ X распределена по показательному закону. Найдите вероятность $P(4 < X < 12)$, если $M(X) = \frac{4}{\ln 2}$.

Контрольные вопросы

- 1) Дайте понятие случайной величины.
- 2) Что такое дискретная случайная величина?
- 3) Объясните, что понимается под суммой и произведением случайных величин?
- 4) Что называется функцией распределения случайной величины?
- 5) Сформулируйте основные свойства функции распределения случайной величины.
- 6) Может ли график функции распределения быть прямой линией? Ответ обоснуйте.
- 7) Как строится многоугольник распределения ДСВ?
- 8) Что такое мода ДСВ? Может ли у случайной величины не быть моды или быть несколько мод?
- 9) Дайте понятие медианы ДСВ.
- 10) Как найти математического ожидания дискретной случайной величины.
- 11) Перечислите основные свойства математического ожидания дискретной случайной величины.
- 12) Может ли математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей целые значения, быть числом нецелым? Ответ обоснуйте.
- 13) Как определяется и что характеризует дисперсия дискретной случайной величины X ?
- 14) Перечислите основные свойства дисперсии.
- 15) Что понимают под среднеквадратичным отклонением? Для чего вводят эту числовую характеристику случайной величины?
- 16) Что называется геометрическим распределением с параметром p ? Приведите пример опытов, в котором определена случайная величина, распределенная по геометрическому закону с параметром p .

- 17) Что называется биномиальным распределением с параметрами n и p ? Приведите пример опытов, в котором определена случайная величина, распределенная по биномиальному закону.
- 18) В чем состоит отличие гипергеометрического распределения от биномиального?
- 19) Какая случайная величина называется непрерывной?
- 20) Как связаны между собой интегральная и дифференциальная функции распределения НСВ?
- 21) Как по-другому называется дифференциальная функции распределения НСВ?
- 22) Сформулируйте основные свойства дифференциальной функции распределения НСВ.
- 23) Как называется график дифференциальной функции распределения НСВ? Может ли он быть разрывным?
- 24) Дайте определение моды НСВ. Каков геометрический смысл моды?
- 25) Что такое медиана НСВ? Каков ее геометрический смысл?
- 26) Определите математическое ожидание НСВ.
- 27) Какова формула для вычисления дисперсии НСВ?
- 28) Дайте понятие равномерно распределенной на отрезке НСВ.
- 29) Какой вид имеет плотность вероятности показательного распределения?
- 30) Каков смысл параметров нормального распределения?