

Учебное пособие

ОСНОВЫ

теории вероятностей

Раздел 1. Случайные события

для студентов специальности 09.02.07
«Информационные системы и программирование»

Содержание

| | | |
|------|---|----|
| 1. | Случайные события. Операции над событиями | 4 |
| 1.1. | Предмет теории вероятностей. Понятие события. Виды событий | 4 |
| 1.2. | Виды случайных событий | 4 |
| 1.3. | Операции над событиями | 6 |
| 2. | Определения вероятности события | 7 |
| 2.1. | Классическое и статистическое определения вероятности | 7 |
| 2.2. | Геометрическое определение вероятности | 9 |
| 3. | Основные теоремы теории вероятности | 11 |
| 3.1. | Теорема сложения для несовместных событий | 11 |
| 3.2. | Теорема умножения для независимых событий | 12 |
| 3.3. | Теорема сложения для совместных событий | 13 |
| 3.4. | Теорема умножения для зависимых событий | 14 |
| 3.5. | Формула полной вероятности | 15 |
| 3.6. | Теорема гипотез (формула Байеса) | 17 |
| 4. | Независимые повторные испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли | 18 |
| 4.1. | Формула Бернулли | 18 |
| 4.2. | Наивероятнейшее число наступления события в схеме Бернулли | 21 |
| 5. | Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона | 23 |
| 5.1. | Теоремы Лапласа | 23 |
| 5.2. | Вероятность редких событий | 25 |
| | Задания для самостоятельного решения | 27 |
| | Ответы | 29 |
| | Контрольные вопросы | 31 |
| | Контрольные задания | 33 |

1. Случайные события. Операции над событиями

1.1. Предмет теории вероятностей. Понятие события. Виды событий

Опр. *ТВ* – это раздел математики, в котором изучаются закономерности случайных событий.

Понятие события является основным, неопределяемым. Его можно охарактеризовать как некоторое явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определённого комплекса условий (опыта, испытания).

Напр.: «брошена монета» - испытание

"появление герба"
"появление решки"} – события

Опр. Событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания, называется *случайным*.

Обозначение: *A, B, C, ...* (заглавные буквы латинского алфавита, возможно с индексами)

Напр.: 1) Бросается игральная кость

Событие A_k – «на грани выпало k очков»

2) Производится выстрел по мишени

B_k – «выбито k очков»

Опр. Событие, которое обязательно произойдёт в результате данного испытания, называется *достоверным*.

Обозначение: *U*

Напр.: 1) извлечение белого шара из урны, в которой находятся все белые шары;

2) выпадение менее семи очков при бросании игрального кубика.

Опр. Событие, которое никогда не произойдёт в результате данного испытания, называется *невозможным*.

Обозначение: *V*

Напр.: 1) выпадение цифры 5 при бросании 10-копеечной монеты;

2) извлечение черного шара из урны с белыми шарами.

1.2. Виды случайных событий

Опр. События A и B называются **несовместными**, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются **совместными**.

Напр.: 1) «появилась решка» и «появился герб» - несовместные события

2) «выпало 2 очка» и «выпало чётное число очков» - совместные события

Опр. События A и \bar{A} называются **противоположными**, если непоявление одного из них в результате данного испытания влечёт появление другого.

Напр.: «появилась решка» и «появился герб» - противоположные события

(!!) Очевидно, что A и \bar{A} несовместны и являются единственными исходами данного испытания.

Опр. События называются **равновозможными**, если ни одно из них не имеет никаких преимуществ в своём появлении перед другими.

Напр.: «выпало 5 очков» и «выпало 3 очка» - равновозможные

Различают события **элементарные** и **составные** (которые разлагаются на элементарные).

Опр. События A называется **благоприятствующим** событию B , если появление события A в результате данного испытания влечёт за собой появление события B .

Пр. Испытание – «производится выстрел по мишени»

События:

- 1) A_k – «выбито k очков» ($k = 0, 1, 2, \dots, 10$)
- 2) B – «выбито чётное число очков»
- 3) C – «выбито нечётное число очков»
- 4) D – «выбито более 4-х очков»
- 5) E – «выбито менее 5-и очков»
- 6) F – «число выбитых очков делится на 11»
- 7) Q – «число выбитых очков меньше 12»

Достоверное событие – Q

Невозможное событие – F

Элементарные: все A_k

Составные: B, E

Попарно несовместны: A_3 и A_8, B и C, A_6 и E

Совместные: A_8 и B, A_3 и C, A_2 и E

Противоположные: B и C, D и E

Равновозможные события: A_2 и A_4

События, не являющиеся равновозможными: A_3 и C

События A_1, A_2, A_3 и A_4 благоприятствуют событию E

События A_1, A_3, A_5, A_7 и A_9 благоприятствуют событию C

Опр. Если совокупность событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти одно из них, и любые два из них несовместны, то она называется **полной группой событий**.

Так, полными группами событий в нашем примере являются:

1) A_0, A_1, \dots, A_{10} ;

2) B и C ;

3) D и E .

1.3. Операции над событиями

Опр. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Обозначение: $A + B, \sum_{i=1}^n A_i$

Напр.: Бросается игральная кость.

A – «выпала 1»

B – «выпала 2»

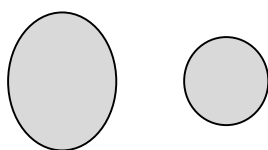
$A + B$ – «выпало не более 2-х очков»

(!!) Сумма событий интерпретируется как объединение множеств:

Несовместные события

A

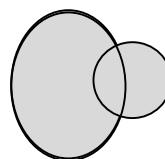
B



Совместные события

A

B



Опр. *Произведением нескольких событий* называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Обозначение: $A \cdot B, \prod_{i=1}^n A_i$

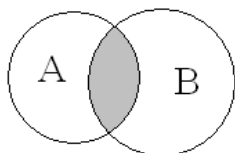
Напр.: Из колоды карт достают карту.

A – «вынута дама»

B – «вынута карта пиковой масти»

$A \cdot B$ – «вынута дама пик»

(!!) Произведению событий соответствует следующая диаграмма Венна:



(!!) Очевидно, $A + \bar{A} = U, A \cdot \bar{A} = V$

Используя операции сложения и умножения, можно сложное событие разложить на более простые и наоборот.

2. Определения вероятности события

2.1. Классическое и статистическое определения вероятности

Пусть A – случайное событие, связанное с некоторым опытом. Повторим опыт n раз в одних и тех же условиях. Пусть при этом событие A повторилось m раз.

Опр. Отношение числа m опытов, в которых событие A появилось, к общему числу n произведённых опытов называется *относительной частотой события A* .

Обозначение: $w(A)$

Таким образом:

$$w(A) = \frac{m}{n}$$

Напр.:

| Экспериментатор | Число бросаний | Число выпадений герба | Частота |
|-----------------------------------|----------------|-----------------------|---------|
| Бюффон (18 век, фр.) | 4040 | 2048 | 0,507 |
| Пирсон (начало 20 века, англ.) | 12000 | 6014 | 0,5012 |
| Пирсон | 24000 | 12012 | 0,5005 |

Опр. (статистическое определение вероятности) Постоянная величина, к которой всё более приближается частота события A при достаточно большом повторении опыта, называется **вероятностью события A** .

Обозначение: $P(A)$, p

Опр. (классическое определение вероятности) **Вероятностью события A** называется отношение числа M элементарных исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к числу N всех элементарных исходов испытания.

Таким образом:

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

При этом предполагается, что элементарные исходы образуют полную группу, несовместны и равновозможны.

(!!) Если статистическая вероятность определяется путём испытаний, то классическая вероятность находится без каких-либо опытов. Последние заменяются логическими рассуждениями.

Из классического определения вероятности вытекают следующие **свойства вероятности:**

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, т.к. $0 \leq M \leq N$

2. $P(U) = 1$, т.к. $P(U) = \frac{N}{N} = 1$

3. $P(V) = 0$, т.к. $P(V) = \frac{0}{N} = 0$

Задача. Брошена игральная кость. Найти вероятность следующих событий: A – «выпало 3 очка», B – «выпало чётное число очков»

/ для A : $N = 6$, $M = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

для B: $N = 6, M = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ /

Задача. Бросаются 2 монеты. Какова вероятность, что обе монеты упадут «гербом» кверху?

/ $\underline{ГГ}, ГР, РГ, РР$ $(\frac{1}{4})$ /

Задача. Бросаются 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?

/ $N = 6 \cdot 6 = 36, M = 6$

| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1- ый | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2- ой | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ /

Задача. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара чёрные?

/ $N = C_{20}^2 = 190, M = C_8^2 = 28 \Rightarrow P(A) = \frac{14}{95}$ /

2.2. Геометрическое определение вероятности

Классическая и статистическая вероятность предполагают конечное число исходов испытаний. Однако часто встречаются такие испытания, для которых число возможных исходов бесконечно. В подобных случаях формула $P(A) = \frac{M}{N}$ неприменима и используется иной подход.

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L . На отрезке L наудачу поставлена точка. Очевидно, что вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством:

$$p = \frac{|l|}{|L|}$$

Если плоская фигура f составляет часть плоской фигуры F , и на фигуру F наудачу брошена точка, то вероятность попадания точки в фигуру f определяется равенством:

$$P = \frac{S_f}{S_F}$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственное тело:

$$P = \frac{V_f}{V_F}$$

Исходя из этого, дадим определение геометрической вероятности.

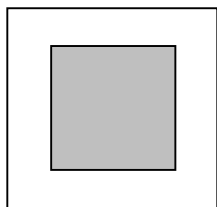
Опр. *Геометрической вероятностью события* называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области.

Задача. Внутри круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

/ а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ / (Для квадрата - $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$, для треугольника - $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$) /

Задача. На плоскости нанесена сетка квадратов со стороной 8 см. Найти вероятность, что брошенный на плоскость круг радиуса 1 см не пересечёт ни одной стороны квадрата.

/



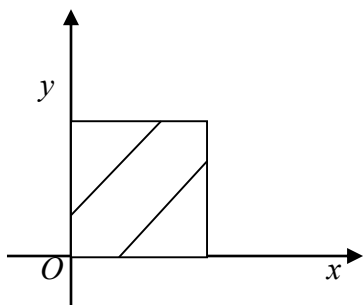
$$p = \frac{6^2}{8^2} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16} \quad /$$

Задача. Два лица договорились встретиться между шестью и семью часами вечера, причём каждый ждёт другого 20 минут, потом уходит. Какова вероятность встречи?

/ Пусть x – время прихода первого лица, y – время прихода второго лица.

Встреча состоится, если $|x - y| \leq 20$, т.е.

$$-20 \leq x - y \leq 20 \quad \begin{cases} y \leq x + 20 \\ y \geq x - 20 \end{cases}$$



$$p = \frac{60 \cdot 60 - 40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = \frac{5}{9} \quad /$$

3. Основные теоремы теории вероятности

3.1. Теорема сложения для несовместных событий

Т1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, неважно какого, равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Доказательство:

Предположим, что испытание допускает N исходов (все одинаково возможны), из них к событию A приводят M_1 исходов, а к событию B – M_2 исходов. Т.к. события A и B несовместны, то к событию $A + B$ будут приводить $M_1 + M_2$ исходов. Следовательно,

$$P(A + B) = \frac{M_1 + M_2}{N} = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} = P(A) + P(B), \text{ ч.т.д.}$$

Сл.1. Теорема справедлива для любого конечного числа попарно несовместных событий.

Сл.2. Если события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу попарно несовместных событий, то $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$.

Сл.3. Если A и \bar{A} – противоположные события, то $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Задача. В ящике 12 белых, 7 чёрных и 11 красных шаров. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность, что вынутый шар – не белый?

/ Пусть A – «вынут чёрный шар»,

B – «вынут красный шар»,

тогда $A + B$ – «вынут чёрный или красный шар».

$$P(A) = \frac{7}{30}, \quad P(B) = \frac{11}{30} \Rightarrow P(A+B) = \frac{7}{30} + \frac{11}{30} = \frac{18}{30} = 0,6 /$$

Задача. От коллектива бригады, которая состоит из 6 мужчин и 4 женщин, на профсоюзную конференцию выбираются 2 человека. Какова вероятность, что среди выбранных хотя бы одна женщина?

$$/ \text{ 1 способ: Пусть } A - \text{«одна женщина»}: P(A) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \dots = \frac{8}{15}$$

$$B - \text{«две женщины»}: P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \dots = \frac{2}{15},$$

$$\text{тогда } P(A+B) = \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\text{2 способ: Пусть } A - \text{«два мужчины»}: P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3},$$

тогда $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$ /

Задача. Бросают 3 игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 17?

/ Пусть A – « < 17 », тогда \bar{A} – « ≥ 17 ».

$$N = \tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$$

Т.к. для 17 очков – 3 возможности, а для 18 очков – 1 возможность, то

$$P(\bar{A}) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}. \text{ А значит, } P(A) = 1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54} /$$

3.2. Теорема умножения для независимых событий

Опр. Событие A называется **независимым от B** , если $P(A)$ не зависит от того, произошло событие B или нет.

(!!) Если события A и B независимы, то независимы события A и \bar{B} .

(!!) Если два события независимы, то независимы и противоположные им события.

Т2. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей, т.е.

| |
|----------------------------------|
| $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ |
|----------------------------------|

(!!) Теорема справедлива для любого конечного числа независимых событий.

Задача. Какова вероятность того, что при 2-х, 3-х, ..., n бросаниях монеты каждый раз будет выпадать герб?

$$/ \text{ Т.к. } P(A_i) = \frac{1}{2}, \text{ то } P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 \cdot A_1 \cdot A_3) = \dots = \frac{1}{8}$$

$$P(\prod_{i=1}^n A_i) = \frac{1}{2^n} /$$

Задача. Задача о стрелках. Два стрелка одновременно производят выстрел по мишени. Первый из них поражает цель в 80%, а второй – в 70% выстрелов. Какова вероятность поражения цели?

$$/ P(A) = 0,8 \quad P(\bar{A}) = 0,2$$

$$P(B) = 0,7 \quad P(\bar{B}) = 0,3$$

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06 \quad \Rightarrow \quad P(A+B) = 1 - 0,06 = 0,94 \quad /$$

Задача. В цехе 2 станка. Вероятность занятости каждого из них равна 0,7. Какова вероятность того, что один станок занят, а второй нет?

/ Пусть A – «занят только один станок»

A_1 – «занят 1-й станок»

A_2 – «занят 2-й станок»,

тогда $A = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$. A следовательно, $P(A) = 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,42 \quad /$

3.3. Теорема сложения для совместных событий

ТЗ. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Доказательство:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & A + B = M_1 + M_2 - K \end{array}$$

K

$$P(A+B) = \frac{M_1 + M_2 - K}{N} = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} - \frac{K}{N} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \text{ ч.т.д.}$$

Обобщение: Аналогично можно доказать справедливость формулы для 3-х совместных событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

(!!) Теорема сложения для несовместных событий – частный случай данной теоремы.

Действительно, если A и B – несовместные события, то $P(A \cdot B) = 0$

Задача. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 2-м или 3-м.

$$/ \quad P(A \cdot B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad /$$

Задача. Задача о 2-х стрелках

/ Пусть $P(A) = 0,7$ и $P(B) = 0,8$, тогда $P(A \cdot B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$.

A значит, $P(A+B) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$ /

3.4. Теорема умножения для зависимых событий

Опр. Условной вероятностью события *A* при условии *B* называется вероятность, вычисленная в предположении, что событие *B* уже произошло.

Обозначение: $P_B(A)$, $P(A|B)$

Т4. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Доказательство:

M_1

M_2

K

N

$$P(A) = \frac{M_1}{N} \quad P(B) = \frac{M_2}{N}$$

$$P(A \cdot B) = \frac{K}{N}$$

$$P_B(A) = \frac{K}{M_2}, \quad P_A(B) = \frac{K}{M_1}$$

$$P(A) \cdot P_A(B) = \frac{M_1}{N} \cdot \frac{K}{M_1} = \frac{K}{N}$$

$$P(B) \cdot P_B(A) = \frac{M_2}{N} \cdot \frac{K}{M_2} = \frac{K}{N}$$

Обобщение: Для 3-х событий: $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cdot B}(C)$

(!!) Теорема умножения для независимых событий является частным случаем данной теоремы, т.к. если *A* и *B* независимы, то $P_A(B) = P(B)$.

Задача. Какова вероятность извлечь из данной партии деталей деталь первого сорта, если 4% всей продукции – брак, а 75% не бракованных изделий – изделия 1 сорта.

/ *A* – «деталь - не бракованная» $P(A) = 0,96$

B – «деталь – 1 сорта» $P_A(B) = 0,75$

$$P(A \cdot B) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72 \quad /$$

Задача. В ящике находятся 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берёт 2 детали. Вычислить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

$$/ A - \text{«1-я деталь стандартная»} \quad P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$B - \text{«2-я деталь стандартная»} \quad P_A(B) = \frac{7}{11}$$

$$P(A \cdot B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33} \quad /$$

Задача. Бросается игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет чётное и меньшее 5 число очков?

$$/ \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad /$$

Задача. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответы на 3 вопроса билета.

$$/ \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} \quad /$$

3.5. Формула полной вероятности

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из совместных событий, образующих полную группу. Нахождение вероятности подобного события даёт следующая теорема, которая является следствием теорем сложения и умножения вероятностей.

Т. Вероятность события A , которое может наступить только при условии появления одного из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий H_1, H_2, \dots, H_n на соответствующую условную вероятность события A , т.е.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P_{H_i}(A)$$

Доказательство:

Т.к. событие A может наступить только вместе с одним из событий H_i , то событие A можно записать так: $A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A$. Следовательно, по Т₁ $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i \cdot A)$. Далее, по Т₄ можно записать: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P_{H_i}(A)$, ч.т.д.

Доказанная формула называется **формулой полной вероятности**, а события H_i – **гипотезами**.

Задача. Пусть имеются три одинаковые урны с таким составом шаров:

- 1) 2 белых и 1 чёрный;
- 2) белых и 2 чёрных;
- 3) 1 белый и 3 чёрных.

Какова вероятность того, что извлечённый из произвольно взятой урны шар - белый?

/ Пусть A – «извлечён белый шар»,

H_i – «извлечён шар из i -ой урны», тогда

$$P(H_1) = \frac{1}{3}, P_{H_1}(A) = \frac{2}{3}, P_{H_2}(A) = \frac{3}{5} \text{ и } P_{H_3}(A) = \frac{1}{4} \text{ А значит,}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \dots = \frac{91}{180} /$$

Задача. Имеются 4 партии ламп по 10, 20, 30 и 40 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равны для каждой партии соответственно 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из 100 данных ламп проработает заданное время?

$$/ P(A) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,9 \approx 0,8 /$$

Задача. 15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса каждый, причём вопросы не повторяются. Студент знает 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на 1 вопрос билета и на один дополнительный вопрос.

/ Пусть A – «студент сдал экзамен», H_1 – «знал 2 вопроса», H_2 – «1-ый вопрос знал, 2-ой - не знал», H_3 – «1-ый вопрос не знал, 2-ой - знал»

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$$

$$P(H_1) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29}, P_{H_1}(A) = 1$$

$$P(H_2) = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29}, \quad P_{H_2}(A) = \frac{24}{28}$$

$$P(H_1) = \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29}, \quad P_{H_3}(A) = \frac{24}{28}$$

$$P(A) = \frac{190}{203} \quad /$$

3.6. Теорема гипотез (формула Байеса)

При выводе формулы полной вероятности предполагается, что событие A , вероятность которого следует определить, может произойти с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу, при этом вероятности указанных событий (гипотез) известны заранее. Предположим, что произведён опыт и событие A наступило. Установим, как изменяются после этого вероятности гипотез, т.е. найдём условные вероятности $P_A(H_i)$ для каждой гипотезы.

$$\text{Т.к. } P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \text{ то } P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Подставляя вместо $P(A)$ формулу полной вероятности, получим **формулу Байеса**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}$$

Т (гипотез) Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из событий (гипотез) H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса.

Задача. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится как 3 к 2. Вероятность того, что будет заправляться легковая машина, равна 0,2. Для грузовой машины эта вероятность равна 0,1. К бензоколонке для заправки подъехала машина. Найти вероятность того, что она грузовая.

/ Пусть A – «машина заправилась»,

H_1 – «подъехала грузовая машина»,

H_2 – «подъехала легковая машина»,

Тогда $P(H_1) = \frac{3}{5}$, $P(H_2) = \frac{2}{5}$, $P_{H_1}(A) = 0,1$ и $P_{H_2}(A) = 0,2$.

$$\text{А значит, } P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} = \dots = \frac{3}{7} /$$

Задача. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый производит, в среднем, 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом?

/ Пусть A – «деталь отличного качества»,

H_1 – «деталь произведена 1-ым автоматом»

H_2 – «деталь произведена 2-ым автоматом»

$$P(H_1) = \frac{2}{3}, P(H_2) = \frac{1}{3}, P_{H_1}(A) = 0,6 \text{ и } P_{H_2}(A) = 0,84 \Rightarrow$$

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} = \dots = \frac{10}{17} /$$

Задача. Две из 4-х независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали 1-я и 2-я лампы, если вероятности отказа для каждой лампы соответственно равны 0,1, 0,2, 0,3 и 0,4.

/ A – «две из 4-х ламп отказали»

H_1 – «отказали 1 и 2 лампы», H_2 – «отказали 1 и 3 лампы», H_3 – «отказали 1 и 4 лампы»,

H_4 – «отказали 2 и 3 лампы», H_5 – «отказали 2 и 4 лампы», H_6 – «отказали 3 и 4 лампы».

$$P(H_1) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,0084 \dots$$

$$P_{H_i}(A) = 1 \quad \forall i \quad P_A(H_1) \approx 0,04 /$$

4. Независимые повторные испытания.

Схема Бернулли. Формула Бернулли

4.1. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание (опыт) повторяется многократно.

Опр. Испытания называются *независимыми относительно события* A , если вероятность появления события A в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность того, что произойдёт событие A , равна p , а следовательно, вероятность того, что оно не произойдёт, равна $q=1-p$. Требуется найти вероятность того, что при n последовательных испытаниях событие A произойдёт ровно m раз. Искомую вероятность обозначим $p_n(m)$.

Пусть A_i – появление события A в i -ом опыте,

$\overline{A_i}$ – не появление события A в i -ом опыте.

1) Для одного испытания возможны следующие 2 исхода: A и \overline{A} .

Вероятности этих исходов выпишем в виде таблицы:

| | | |
|-------------|-----|----------------|
| Событие | A | \overline{A} |
| Вероятность | p | q |

Очевидно, $p_1(1) = p$, $p_1(0) = q$

$p_1(1) + p_1(0) = p + q = 1$.

2) Для 2-х испытаний возможны $2^2 = 4$ исхода: $A_1 \cdot A_2$, $A_1 \cdot \overline{A_2}$, $\overline{A_1} \cdot A_2$, $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$.

| | | | | |
|-------------|-----------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| Событие | $A_1 \cdot A_2$ | $A_1 \cdot \overline{A_2}$ | $\overline{A_1} \cdot A_2$ | $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ |
| Вероятность | p^2 | $p \cdot q$ | $q \cdot p$ | q^2 |

Очевидно, $p_2(2) = p^2$

$p_2(1) = 2p \cdot q$

$$p_2(0) = q^2$$

$$p_2(2) + p_2(1) + p_2(0) = (p + q)^2 = 1$$

3) Для 3-х испытаний – 8 исходов

| Событие | $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ | $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ | $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$ | $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$ | $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$ | $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$ | $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ | $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ |
|-------------|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| Вероятность | p^3 | p^2q | p^2q | p^2q | pq^2 | pq^2 | pq^2 | q^3 |

Очевидно, $p_3(3) = p^3$

$$p_3(2) = 3p^2 \cdot q$$

$$p_3(1) = 3pq^2$$

$$p_3(0) = q^3$$

$$p_3(3) + p_3(2) + p_3(1) + p_3(0) = (p + q)^3 = 1$$

Анализируя эти случаи, можно сделать общий вывод: вероятность $p_n(m)$ пропорциональна произведению $p^m \cdot q^{n-m}$, причём коэффициент пропорциональности равен C_n^m .

Т.о.,

$$p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad - \text{формула Бернулли}$$

Задача. Монету бросают 8 раз. Какова вероятность, что 4 раза выпадет «герб»?

$$/ n = 8, \quad m = 4, \quad p = q = \frac{1}{2}$$

$$p_8(4) = C_8^4 p^4 \cdot q^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \dots = \frac{35}{128} < \frac{1}{3} \quad /$$

Задача. В урне 20 шаров: 15 белых и 5 чёрных. Вынули подряд 5 шаров, причём каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего шары в урне тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет 2 белых.

$$/ n = 5, \quad m = 2, \quad p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{4}$$

$$p_5(2) = C_5^2 p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \dots = \frac{45}{512} /$$

(!!) Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее t раз; б) более t раз; в) не более t раз; г) не менее t раз, - находится соответственно по формулам: $p_n(0) + \dots + p_n(t-1)$;

$$p_n(t+1) + \dots + p_n(n);$$

$$p_n(0) + \dots + p_n(t);$$

$$p_n(t) + \dots + p_n(n).$$

Задача. Вероятность изготовления на станке-автомате нестандартной детали равна 0,02. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых шести деталей окажутся более 4-х стандартных.

$$/ n = 6, \quad p = 0,02, \quad q = 0,98$$

$$p_6(0 \leq t \leq 1) = p_6(0) + p_6(1) = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 \approx 0,9943 /$$

4.2. Наивероятнейшее число наступления события в схеме Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний. При каждом таком испытании событие A может произойти или не произойти. Известна вероятность появления события A . Какое число появления события A из чисел $0, 1, \dots, n$ наиболее вероятно, т.е. надо найти такое число t , для которого вероятность $P_n(t)$ будет наибольшей?

Задача. Монета бросается 10 раз в неизменных условиях. Испытания независимы. Выясним, какая из вероятностей $p_n(t)$ выпадения герба наибольшая.

Составим таблицу.

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------------|------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| C_{10}^m | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |
| $P_{10}(m)$ | $\frac{1}{1024}$ | $\frac{10}{1024}$ | $\frac{45}{1024}$ | $\frac{120}{1024}$ | $\frac{210}{1024}$ | $\frac{252}{1024}$ | $\frac{210}{1024}$ | $\frac{120}{1024}$ | $\frac{45}{1024}$ | $\frac{10}{1024}$ | $\frac{1}{1024}$ |

$$\text{Наибольшая вероятность } p_{10}(5) = \frac{252}{1024}.$$

Очевидно, если n – нечётное число, то будет 2 равные наибольшие вероятности.

Практически вычислять каждый раз $p_n(m)$ и выбирать из них наибольшее – дело громоздкое. Поэтому существует косвенный метод вычисления наиболее вероятного числа наступления событий.

Пусть из всех значений m μ - наиболее вероятное число наступления события А, т.е. $p_n(\mu - 1) \leq p_n(\mu) \geq p_n(\mu + 1)$.

Рассмотрим 1-ое неравенство:

$$C_n^{\mu-1} p^{\mu-1} q^{n-\mu+1} \leq C_n^{\mu} p^{\mu} q^{n-\mu}$$

$$\frac{n!}{(\mu-1)!(n-\mu+1)!} p^{\mu-1} q^{n-\mu+1} \leq \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^{\mu} q^{n-\mu}$$

$$\frac{1}{n-\mu+1} \cdot q \leq \frac{1}{\mu} \cdot p$$

$$q \mu \leq p (n - \mu + 1)$$

$$(p + q) \mu \leq p n + p \quad \Rightarrow \quad \mu \leq p n + p$$

Проведя аналогичные выкладки для 2-го неравенства, получим

$$\mu \geq p n - q$$

Таким образом, число μ должно удовлетворять двойному неравенству:

$$np - q \leq \mu \leq np + p$$

Очевидно, что отрезок $[np - q; np + p]$, в котором лежит μ , имеет длину 1. Поэтому, если его концы не являются целыми числами, то между ними лежит единственное целое число, и μ определено однозначно. В случае, если оба конца – целые числа, имеются 2 наивероятнейших значения : $np - q$ и $np + p$.

Задача. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случае отбора партии из 75 изделий?

$$/ p = 0,31, \quad q = 0,69, \quad n = 75$$

$$0,31 \cdot 75 - 0,69 \leq \mu \leq 0,31 \cdot 75 + 0,31$$

$$22,56 \leq \mu \leq 23,56 \quad \mu = 23 \quad /$$

Задача. Было посажено 28 семян ячменя с одной и той же вероятностью всхожести $\frac{18}{29}$ для каждого. Найти наиболее вероятное число проросших семян.

/ 17 и 18 /

Задача. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для 1-го стрелка равна 0,2, а 2-го – 0,4. Найти наименее вероятное число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

$$/ n = 25, \quad p = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08, \quad q = 0,92$$

$$0,08 \cdot 25 - 0,92 \leq \mu \leq 0,08 \cdot 25 + 0,92$$

$$1,08 \leq \mu \leq 2,08 \Rightarrow \mu = 2 \quad /$$

5. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона

5.1. Теоремы Лапласа

Подсчёт вероятности $p_n(m)$ по формуле Бернулли при больших значениях n связан с громоздкими вычислениями. Это побудило найти более простые по виду, хотя и приближённые формулы. Впервые такую формулу получил Муавр для $p = 0,5$. Лаплас доказал эту формулу для более широкого класса p .

Т₁ (локальная) Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$), тогда вероятность того, что событие A наступит ровно m раз, вычисляется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Для функции $\varphi(x)$ составлены специальные таблицы её значений при положительных значениях x . Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, т.к. функция $\varphi(x)$ - чётная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Задача. Два спортсмена играют в настольный теннис. Вероятность выигрыша первого спортсмена равна $\frac{5}{9}$. Какова вероятность того, что он выиграет две партии из пяти?

$$/ \quad n = 5, m = 2, p = \frac{5}{9}, q = \frac{4}{9}$$

По формуле Бернулли: $p_5(2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 \approx 0,271$

По локальной теореме Лапласа: $\sqrt{npq} = \frac{10}{9}$

$$x = \frac{2 - \frac{25}{9}}{\frac{10}{9}} = -0,7 \quad \varphi(-0,7) = \varphi(0,7) = 0,3123 \quad p_5(2) \approx 0,9 \cdot 0,3123 = 0,281 /$$

(!!) Точность формулы повышается с увеличением n .

Задача. Игральную кость бросают 80 раз. Определить вероятность того, что цифра 3 появится 20 раз.

$$/ \quad n = 80, \quad m = 20, \quad p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 80 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{10}{3}} = 2$$

По таблице находим $\varphi(2) = 0,054$. Следовательно, $p_{80}(20) \approx \frac{1}{\frac{10}{3}} \cdot 0,054 = \frac{3 \cdot 0,054}{10} = 0,0162 /$

Задача. Медиками установлено, что 94% лиц, которым сделаны прививки против туберкулёза, отличаются иммунитетом. Какова вероятность того, что из 100 тыс. граждан, получивших прививки, 5800 не защищены от заболеваний?

$$/ \quad n = 100000, \quad m = 5800, \quad p = 0,06, \quad q = 0,94$$

$$\sqrt{npq} \approx 75, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx -2,7$$

$\varphi(-2,7) = \varphi(2,7) = 0,0104$. Следовательно, $p_{100000}(5800) \approx 0,00014 /$

T₂ (интегральная) Вероятность того, что в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, вычисляется по формуле:

$$p_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ и } x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Таблица функции $\Phi(x)$ для положительных значений $x \leq 5$ приводится в приложениях. Для $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0,5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что эта функция нечётная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Задача. Какова вероятность того, что при 200 бросаниях монеты число появлений герба удовлетворяет неравенству $95 \leq m \leq 105$.

$$/ n = 200, m_1 = 95, m_2 = 105, p = q = 0,5$$

$$x_1 = \frac{95-100}{\sqrt{50}} \approx -0,7070, \quad x_2 = \frac{105-100}{\sqrt{50}} \approx 0,7070$$

$$p_{200}(95 \leq m \leq 105) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 2 \Phi(x_2).$$

По таблице находим $\Phi(0,71) = 0,2611$. Следовательно, $p_{200}(95 \leq m \leq 105) \approx 0,5222$ /

5.2. Вероятность редких событий

Опр. Событие называется *редким*, если его вероятность в отдельном испытании близка к нулю.

Для таких событий формула Лапласа даёт результаты, недостаточно близкие к их истинным значениям. В таких случаях применяют другую формулу – формулу Пуассона.

Тз Если вероятность p наступления события A в каждом испытании близка к нулю, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближённо вычисляется по формуле:

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \text{ где } \lambda = np$$

Задача. Среди 1000 человек примерно 8 левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши?

$$/ n = 100, m = 0, p = 0,008, q = 0,992$$

$$\lambda = 0,8 \quad P_{100}(0) \approx \frac{0,8^0 \cdot e^{-0,8}}{0!} = e^{-0,8} \approx 0,4493 /$$

Задача. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определённая микросхема. Вероятность её отказа в течение 1 часа работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 1000 часов работы устройства придётся 5 раз менять микросхему?

$$/ n = 1000, \quad m = 5, \quad p = 0,004, \quad q = 0,996$$

$$\lambda = 4 \quad P_{100}(0) \approx \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx 0,1563 /$$

Задания для самостоятельного решения

1. Среди 50-и деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что наудачу вынутая деталь окажется стандартной? (нестандартной?)
2. Из урны, в которой находятся 3 белых, 4 чёрных и 5 красных шаров, наудачу вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) чёрным; в) жёлтым; г) красным?
3. Цифры 0,1,...,9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны? Произвольным образом вынимают подряд 3 карточки и кладут в ряд. Какова вероятность того, что число, состоящее из 3-х цифр, которые написаны на карточках, больше 987?
4. Куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 кубиков. Наудачу извлекают 1 кубик. Определить вероятность того, что этот кубик: а) с одной окрашенной гранью; б) с 2-мя окрашенными гранями; в) с 3-мя окрашенными гранями?
5. Бросаются 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на 2-х костях, равна 8? (меньше 13?)
6. В урне 100 шаров, помеченных номерами 1, 2, ..., 100. Из урны наудачу вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?
7. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди пяти наудачу выбранных билетов два будут выигрышными?
8. 9 книг расставляются на полке. Какова вероятность того, что указанные 3 книги будут стоять рядом?
9. Из букв составлено слово «книга». Это слово рассыпали и произвольно собрали заново. Какова вероятность того, что снова получится слово «книга»?
10. В группе 30 учащихся. Из них 12 юношей. Известно, что к доске должны быть вызваны 2-е учащихся. Какова вероятность, что это девушки?

11. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см. Наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечёт ни одной из прямых.

12. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых равны 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадёт также в кольцо, образованное окружностями?

13. Быстро вращающийся диск разделён на чётное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и чёрный цвет. По диску произведён выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадёт в один из белых секторов?

14. В пакете имеются 17 жетонов, пронумерованных числами 11 – 27. Какова вероятность того, чтобы извлечь жетон с номером, кратным 4 или 7?

15. Среди одинаковых по внешнему виду 11 изделий находятся 3 бракованных. Произвольно вынимают 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно бракованное.

16. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на 1-ом кубике выпадет чётное число очков, а на втором – число, меньшее 5?

17. Вероятность поломки первого станка в течение смены равна 0,2, а второго – 0,13. Чему равна вероятность того, что хотя бы один станок ломается?

18. Из 30-и учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 – волейболом, 5 – баскетболом и волейболом, а остальные другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или баскетболом?

19. Из 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

20. В некоторой местности число пасмурных дней в неделю равно 3. Какова вероятность того, что три дня подряд будет светить солнце?

21. Имеются 2 одинаковые урны: 1-ая содержит 2 чёрных и 3 белых шара, 2-ая – 2 чёрных и 1 белый шар. Сначала произвольно вынимают урну, а затем наугад из неё извлекают 1 шар. Какова вероятность, что будет выбран белый шар?

22. В урне находятся 3 шара, цвет, которых может быть белым или чёрным. Какова вероятность, что вынутый шар – белый?

23. Две перфораторщицы набивают на одинаковых и исправных перфораторах перфокарты. Одна обрабатывает, в среднем, 60% карт из предложенной партии, вторая 40%. Вероятность того, что 1-ая допустит ошибку, равна 0,03, 2-ая – 0,05. Взятая на контроль перфокарта оказалась с ошибкой. Какова вероятность того, что ошиблась 2-ая перфораторщица?

24. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 – с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок при выстреле из винтовки с оптикой поразит мишень равна 0,95, а без оптики – 0,8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: он стрелял из винтовки с оптикой или без?

25. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

26. В ящике 80 стандартных и 20 нестандартных деталей. Какова вероятность, что из 5-и взятых наудачу деталей не менее 4-х окажутся стандартными?

27. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8. По цели производят 15 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий.

28. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение 1 часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

Ответы

1. $\frac{45}{50}$ ($\frac{5}{50}$) 2. а) $\frac{3}{12}$; б) $\frac{4}{12}$; в) 0; г) $\frac{5}{12}$ 3. 0 4. а) $\frac{384}{1000}$; б) $\frac{96}{1000}$;
в) $\frac{8}{1000}$ 5. $\frac{5}{36}$ (1) 6. $\frac{19}{100}$ 7. $\frac{164}{1081}$ 8. $\frac{1}{12}$ 9. $\frac{1}{120}$ 10. $\frac{51}{145}$ 11. $\frac{2}{3}$

- 12.** 0,75 **13.** 0,5 **14.** $\frac{6}{17}$ **15.** $\frac{109}{165}$ **16.** $\frac{1}{3}$ **17.** 0,304 **18.** $\frac{11}{15}$ **19.** $\frac{2}{87}$
20. $\frac{4}{35}$ **21.** $\frac{7}{15}$ **22.** 0,5 **23.** $\frac{10}{19}$ **24.** Без оптики (с оптикой - $\frac{19}{43}$, без оптики - $\frac{24}{43}$) **25.** $\approx 0,28$ **26.** 0,73728 **27.** 12 **28.** 0,167

Контрольные вопросы

- 1) Какое событие называется случайным?
- 2) Какое событие называется достоверным?
- 3) Какое событие называется невозможным?
- 4) Какие два события называется противоположными?
- 5) Сформулируйте классическое определение вероятности.
- 6) Какая существует связь между вероятностями противоположных событий?
- 7) Какие два события называется несовместными? (совместными)
- 8) Сформулируйте теорему о вероятности суммы двух несовместных событий.
- 9) Сформулируйте теорему о вероятности суммы двух совместных событий.
- 10) Дайте понятие события, зависящего от другого.
- 11) Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух независимых событий.
- 12) Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух зависимых событий.
- 13) Дайте понятие совместных и несовместных событий.
- 14) Сформулируйте теорему сложения для несовместных событий.
- 15) Сформулируйте теорему сложения для совместных событий.
- 16) Сформулируйте теорему умножения для независимых событий.
- 17) Сформулируйте теорему умножения для зависимых событий.
- 18) Дайте понятие условной вероятности.
- 19) Запишите формулу полной вероятности.
- 20) Для каких целей используется формула Байеса? Какой вид она имеет?
- 21) Запишите формулу Бернулли. Объясните смысл входящих в нее величин.
- 22) Как найти наиболее вероятное число наступления события?

23) Для вычисления каких вероятностей событий предназначены локальная и интегральная теоремы Лапласа?

24) В каком случае применяют формулу Пуассона?

Контрольные задания

1. В группе учатся 13 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.
2. В партии из 13 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобрали $\tilde{n} = 7$ деталей. Найдите вероятность P того, что среди отобранных деталей ровно 5 стандартных.
3. Независимо друг от друга 5 человек садятся в поезд, содержащий 13 вагонов. Найдите вероятность того, что все они поедут в разных вагонах.
4. Имеется 25 экзаменационных билетов, на каждом из которых напечатано условие некоторой задачи. В 15 билетах задачи по статистике, а в остальных 10 билетах задачи по теории вероятностей. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из них не достанется задачи по теории вероятностей.
5. В киоске продается 9 лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет 3 штуки. Студент купил 4 билета. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше 2, но не больше 3?
6. Внутри круга радиуса 50 наудачу брошена точка. Какова вероятность p того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата? правильного треугольника? Правильного шестиугольника?
7. В квадрат со стороной 15 случайным образом вбрасывается точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется в правой верхней четверти квадрата или не далее, чем в 2 от центра квадрата.
8. Пассажир подходит к остановке автобусов двух маршрутов. Интервал движения автобусов 1-го маршрута составляет 19 мин., а 2-го маршрута – 21 мин. Найдите вероятность P того, что пассажир уедет с остановки не позднее, чем через 6 мин., считая, что его устроит автобус как 1-го, так и 2-го маршрутов.

9. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.17, 0.73 и 0.14. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

10. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при 9 выстрелах равна 0.81. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

11. В ящике содержатся 6 деталей, изготовленных на заводе 1, 5 деталей – на заводе 2 и 6 деталей – на заводе 3. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1, 2 и 3 соответственно равны 0.04, 0.02 и 0.03. Найдите вероятность P того, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной.

12. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 23 белых шара, во втором – 9 белых и 14 черных шаров, в третьем – 23 черных шара. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность P того, что шар вынут из второго ящика.

13. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.18 . Сделано 7 выстрелов. Найдите вероятность того, что в цель попали менее трех раз.

14. Вероятность попадания стрелком в цель равна $\frac{1}{12}$. Сделано 132 выстрелов. Определите наивероятнейшее число попаданий в цель.