

Министерство образования, науки и молодежной политики
Краснодарского края

ГБПОУ КК «Армавирский машиностроительный техникум»

Учебное пособие
Множества
и бинарные отношения

для обучающихся специальности 09.02.07
«Информационные системы и программирование»

Содержание

1.	Множества, их виды. Способы задания множеств	4
1.1.	Понятия множества и его элементов. Виды множеств	4
1.2.	Подмножества. Универсальное множество	5
1.3.	Способы задания множеств	5
2.	Операции над множествами и их свойства	7
2.1.	Объединение множеств (сложение)	7
2.2.	Пересечение множеств (произведение)	7
2.3.	Разность множеств	8
2.4.	Дополнение множества	9
2.5.	Дизъюнктивная сумма множеств (симметрическая разность)	9
2.6.	Тождества алгебры множеств, связывающие несколько операций	10
3.	Декартово произведение множеств и его свойства	11
4.	Бинарные отношения	12
4.1.	Понятие бинарных отношений	12
4.2.	Области определения и значений бинарного отношения	13
4.3.	Типы бинарных отношений	13
4.4.	Матрица отношения	14
4.5.	Операции над бинарными отношениями и их свойства	15
4.6.	Основные свойства бинарных отношений во множестве A	17
4.7.	Виды бинарных отношений во множестве	18
5.	Функции и отображения	20
5.1.	Функциональные отношения	20
5.2.	Отображения и их типы	21
5.3.	Подстановки как отображения	22
	Задания для самостоятельного решения	24
	Контрольные вопросы	27
	Тест для самоконтроля	29

1. Множества, их виды. Способы задания множеств

1.1. Понятия множества и его элементов. Виды множеств

Опр. А) «Множество есть многое, мыслимое нами как единое целое»
(Г. Кантор)

Б) **Множество** – это совокупность объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Обозначение: A, B, C, \dots (возможно, с индексами)

Опр. Объекты, из которых состоит множество, называются его **элементами**.

Обозначение: a, b, c, \dots (возможно, с индексами)

При этом говорят, что элемент принадлежит множеству, и пишут: $a \in A$.

Опр. Множество называется **конечным**, если оно содержит конечное число элементов, и **бесконечным**, если в нем бесконечно много элементов.

Напр.: 1) Множество дней недели – конечное

2) Множество натуральных чисел – бесконечное

Опр. Число элементов множества называется **мощностью** этого множества.

Обозначение: $|A|$

Опр. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется **пустым**.

Обозначение: \emptyset .

(!!) Очевидно, что $|\emptyset| = 0$.

Опр. Два множества, имеющие одинаковую мощность, называются **равномощными**.

Напр.: A – множество цветов радуги, B – множество нот

$$|A| = |B| = 7$$

Опр. Два множества называются **равными**, если они содержат одни и те же элементы.

Обозначение: $A = B$

(!!) Если $A = B$, то $|A| = |B|$.

1.2. Подмножества. Универсальное множество

Опр. Множество B называется *подмножеством* множества A , если всякий элемент множества B является элементом множества A .

Обозначение: $B \subset A$

Напр.: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

(!!) 1) Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

2) Если A – некоторое множество, то $\emptyset \subset A$ и $A \subset A$.

Опр. Подмножества A и \emptyset множества A называются *несобственными подмножествами* множества A . Любое другое подмножество называется *собственным подмножеством* этого множества.

Напр.: $A = \{1; 2; 3\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}$ – собственные подмножества

Опр. Множество всех подмножеств некоторого множества A называется его *булеаном*.

Обозначение: $B(A)$

Напр.: $A = \{a; b\}$

$B(A) = \{ \emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\} \}$

(!!) $|B(A)| = 2^{|A|}$, т.е. множество, содержащее n элементов, имеет 2^n подмножеств.

Опр. Воображаемое множество, содержащее в себе все другие множества, называется *универсальным*.

Обозначение: U .

1.3. Способы задания множеств

1) Перечислением (списком) его элементов

Этот способ используется только для конечных множеств.

Напр.: $D = \{\text{понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}\}$

2) Порождающей процедурой

Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов, либо из других объектов.

Этот способ используется для бесконечных множеств.

Напр.: а) $M = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$

$m_1 = 1, m_2 = 1, m_{n+2} = m_n + m_{n+1}$ – порождающая процедура

б) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

$a_n = 2n$ – порождающая процедура

3) Указанием характеристического свойства

Характеристическое свойство – это такое свойство, что элементы множества им обладают, а все остальное на свете не обладает.

Этот способ применим как к конечным, так и бесконечным множествам.

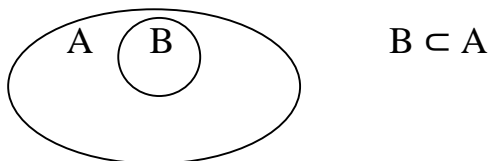
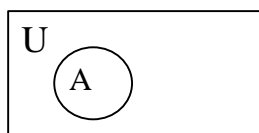
Напр.: а) Герои романа Л. Н. Толстого «Война и мир».

Такое описание множества вполне понятно. Очевидно, что А. Болконский принадлежит этому множеству, а А. Каренина не принадлежит.

б) $M = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ – множество всех действительных чисел таких, что они заключены между 0 и 1 включительно.

4) Графически (с помощью диаграмм Эйлера-Венна)

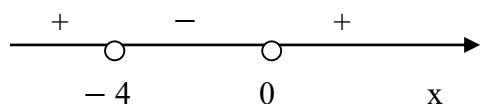
Универсальное множество обозначается в виде прямоугольника. Любое множество А, являющееся подмножеством U, изображают в виде круга.



ПР. Прочитайте запись $M = \{x \in Z \mid x^2 + 4x < 0\}$. Задайте это множество перечислением элементов. Запишите все подмножества множества M.

/ М – множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 + 4x < 0$.

Решим неравенство: $x(x + 4) < 0$



$$M = \{-3; -2; -1\}$$

$$B(M) = \{\emptyset; \{-3\}; \{-2\}; \{-1\}; \{-3; -2\}; \{-2; -1\}; \{-3; -1\}; \{-3; -2; -1\}\} /$$

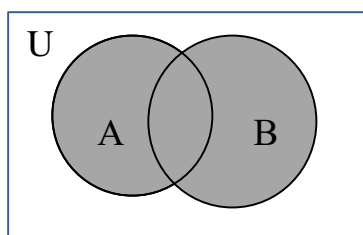
2. Операции над множествами и их свойства

2.1. Объединение множеств (сложение)

Опр. Объединением 2-х множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств.

Обозначение: $A \cup B$

Т. о.: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$



Напр.: 1) $\{1; 2; 3\} \cup \{2; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$

2) $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ $A \cup B = \mathbb{N}$

(!!) 1) Если А – произвольное множество, то

$A \cup A = A$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cup U = U$
----------------	------------------------	----------------

2) Если А и В – произвольные множества, то $A \cup B = B \cup A$

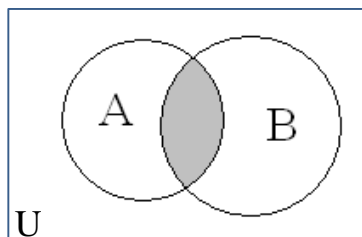
3) Если $B \subset A$, то $B \cup A = A$

2.2. Пересечение множеств (произведение)

Опр. Пересечением 2-х множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств.

Обозначение: $A \cap B$

Т. о.: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$



Напр.: 1) $\{1; 2; 3\} \cap \{2; 3; 4\} = \{2; 3\}$

2) $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}, B = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$

$A \cap B = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbb{Z}\}$

(!!) 1) Если A – произвольное множество, то

$A \cap A = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cap U = A$
----------------	--------------------------------	----------------

2) Если A и B – произвольные множества, то $A \cap B = B \cap A$

3) Если $B \subset A$, то $B \cap A = B$

Совершенно аналогично определяются объединение и пересечение 3-х, 4-х, ..., бесконечного числа множеств.

(!!) Имеют место равенства:

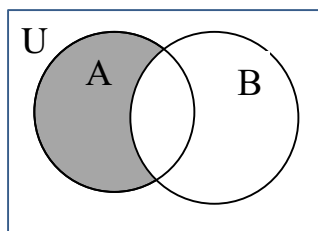
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
---	---

2.3. Разность множеств

Опр. Разностью 2-х множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

Обозначение: $A \setminus B$

Т. о.: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$



Напр.: 1) $\{1; 2; 3\} \setminus \{2; 3; 4\} = \{1\}$

(!!) Если A – произвольное множество, то

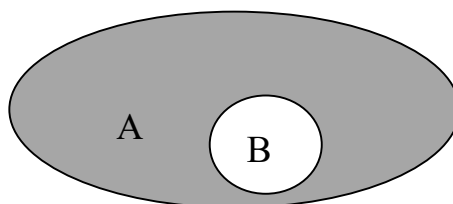
$A \setminus A = \emptyset$	$A \setminus \emptyset = A$	$A \setminus U = \emptyset$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

В отличие от объединения и пересечения, разность – строго двуместна.

2.4. Дополнение множества

Опр. Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением множества B до множества A* .

Обозначение: \overline{B}_A



Опр. Дополнением множества A до универсального множества U , или просто *дополнением*, называется множество всех элементов множества U , не принадлежащих A .

Обозначение: \bar{A}

По определению: $\bar{A} = U \setminus A$

(!!) Очевидно:

$\overline{\emptyset} = U$	$\overline{U} = \emptyset$	$\overline{\bar{A}} = A$	$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
----------------------------	----------------------------	--------------------------	----------------------	------------------------------

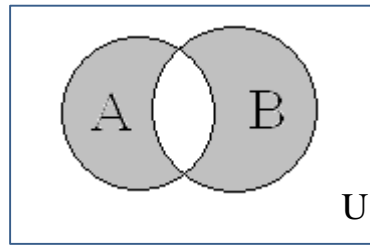
Дополнение – одноместная операция.

2.5. Дизъюнктивная сумма множеств (симметрическая разность)

Опр. Дизъюнктивной суммой 2-х множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A , или множеству B , но не обоим вместе.

Обозначение: $A \oplus B$

Т. о.: $A \oplus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \text{ или } x \notin A \text{ и } x \in B \}$



Напр: $1) \{ 1; 2; 3 \} \oplus \{ 2; 3; 4 \} = \{ 1; 4 \}$

(!!) Если A – произвольное множество, то

$A \oplus A = \emptyset$	$A \oplus \emptyset = A$	$A \oplus U = \bar{A}$
--------------------------	--------------------------	------------------------

2.6. Тождества алгебры множеств, связывающие несколько операций

1. Законы поглощения:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

2. Дистрибутивность:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3. Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$4. A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$5. A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Все эти формулы легко доказать с использованием кругов Эйлера. Для этого достаточно построить области, соответствующие правой и левой частям тождества, и установить их совпадение.

ПР. Упростите:

$$1) (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$$

$$/ (A \cup \bar{A}) \cap (B \cap C) = U \cap (B \cap C) = B \cap C /$$

$$2) (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C)$$

$$/ ((A \cap B) \cap C) \cup ((\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C) = ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})) \cap C = (U \cap C) = C /$$

$$3) \overline{X \setminus Y} \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})$$

$$/ \overline{X \setminus Y} \cap (\bar{X} \cup \bar{Y}) = \overline{X \cap \bar{Y}} \cap (\bar{X} \cup \bar{Y}) = (X \cap Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y}) = X \cap (Y \cap \bar{Y}) = X \cap \emptyset = \emptyset /$$

ПР. Докажите с помощью тождественных преобразований:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

/ Л.ч. $A \setminus (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{A \cap \overline{B}} = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$,
ч.т.д./

3. Декартово произведение множеств и его свойства.

Декартова степень множества

Опр. *Прямое (декартовым) произведением 2-х множеств A и B* называется множество, элементами которого являются все упорядоченные пары $(a; b)$, первые компоненты которых принадлежат множеству A, а вторые – множеству B.

Обозначение: $A \times B$

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$$

ПР. $A = \{1; 2; 3\}, B = \{2; 4\}$

1) $A \times B = \{(1; 2), (1; 4), (2; 2), (2; 4), (3; 2), (3; 4)\}$

2) $B \times A = \{(2; 1), (2; 2), (2; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$

(!!) 1) *Прямое произведение множеств не коммутативно, т.е.*

$$A \times B \neq B \times A$$

2) *Число элементов прямого произведения равно произведению числа элементов множеств A и B, т.е.* $|A \times B| = |A| \times |B|$

Опр. Если $A = B$, то $A \times B = A \times A$ – декартовый квадрат.

Обозначение: A^2

Напр.: $R^2 = R \times R$ – множество точек плоскости $(x; y)$

ПР. $A^2 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$

Опр. *Прямое произведение множеств A_1, A_2, \dots, A_n* называется множество, состоящее из упорядоченных n -ок.

Обозначение: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ где } i = 1, \dots, n\}$$

(!!) Если все $A_i = A$, то $A \times A \times \dots \times A = A^n$ и $|A^n| = |A|^n$.

Пр. $B^3 = \{(2; 2; 2), (2; 2; 4), (2; 4; 2), (2; 4; 4), (4; 2; 2), (4; 2; 4), (4; 4; 2), (4; 4; 4)\}$

Опр. Упорядоченную n -ку называют **n -мерным вектором** или **кортежем**, а элементы, составляющие n -ку, – ее **координатами**.

Опр. Две n -ки называются **равными**, если они имеют одинаковую длину, и соответствующие координаты их равны.

4. Бинарные отношения

Многие задачи математики, техники и других областей человеческой деятельности получают удобную интерпретацию на языке **теории отношений**. Все арифметические операции – это, по существу, некоторые отношения между числовыми множествами. Множество деталей остается складским имуществом до тех пор, пока между ними не реализуются определенные отношения, превращающие эти детали в какой-нибудь механизм или устройство (телевизор, станок, ПК, здание, мост, ...). Разнообразные отношения складываются между людьми: родители и дети, начальники и подчиненные, учителя и учащиеся.

Отношения между элементами двух множеств, т.е. бинарные отношения, устанавливают соответствие элементов одного множества A элементам другого множества B .

4.1. Понятие бинарных отношений

Опр. Подмножество R прямого произведения множеств A и B называется **бинарным отношением**.

Обозначение: $R \subset A \times B$

Если $(a; b) \in R$, то говорят, что элементы a и b находятся в отношении R и пишут aRb .

Пр. Пусть даны два множества $A = \{2; 3\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$.

Тогда $A \times B = \{(2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6)\}$

Пусть R_1 – отношение «*быть делителем*», т.е. запись aRb означает, что a – делитель b .

Тогда $R_1 = \{(2; 4); (2; 6); (3; 3); (3; 6)\}$.

R_2 – отношение «*быть равным*»

$$R_2 = \{(3; 3)\}$$

R_3 – отношение «*быть \leq* »

$$R_3 = A \times B$$

R_4 – отношение «*быть $>$* »

$$R_4 = \emptyset$$

Пр. Пусть M – множество людей. Тогда можно задать на этом множестве следующие бинарные отношения: «*быть моложе*», «*быть сыном*», «*жить в одном городе*», «*быть знакомым*»,...

4.2. Области определения и значений бинарного отношения

Опр. *Областью определения* бинарного отношения $R \subset A \times B$ называется подмножество множества A , для элементов которого найдутся такие элементы из B , что aRb .

Обозначение: $\text{Dom } R$

Опр. *Областью значений* бинарного отношения $R \subset A \times B$ называется подмножество множества B , для элементов которого найдутся такие элементы из A , что aRb .

Обозначение: $\text{Im } R$

Иначе говоря, множество первых координат в упорядоченных парах, составляющих бинарное отношение R , образует область определения, а множество вторых координат – область значений этого отношения.

Так, $\text{Dom } R_1 = \{2; 3\} = A$,

$\text{Im } R_1 = \{3; 4; 6\} \subset B$

$\text{Dom } R_2 = \{3\} \subset A$,

$\text{Im } R_2 = \{3\} \subset B$

$\text{Dom } R_3 = A$,

$\text{Im } R_3 = B$

$\text{Dom } R_4 = \text{Im } R_4 = \emptyset$

4.3. Типы бинарных отношений

1) Если $\text{Dom } R \subset A, \text{Im } R \subset B$, то говорят, что R есть *отношение от A к B* . Его называют также *соответствием*.

2) Если $\text{Dom } R = A$, то говорят, что *отношение определено на A* .

3) Если $B = A$, то отношение $R \subset A \times A$ называют *отношением в A* .

При этом различают три частных случая:

а) *Полное (универсальное) отношение R* , которое имеет место для каждой пары $(a_1; a_2)$ элементов из A .

Напр.: Отношение «учиться в одной группе» во множестве студентов этой группы.

б) *Тождественное (диагональное) отношение E* - такое, что каждый элемент множества A находится в этом отношении только с самим собой.

Напр.: Отношение «равенства» во множестве R .

в) *Пустое отношение \emptyset* , которому не удовлетворяет ни одна пара элементов из A .

Напр.: Отношение «быть братом» во множестве женщин.

(!!) Для любого отношения R в A справедливы включения: $\emptyset \subset E \subset R$.

4.4. Матрица отношения

Для задания бинарных отношений можно использовать любой способ задания множеств. Но существует специальный способ задания отношения – табличный (с помощью матрицы).

Опр. *Матрица бинарного отношения R* – это прямоугольная таблица, строки которой соответствуют первым координатам, а столбцы – вторым координатам. На пересечении i -й строки и j -ого столбца ставится 1, если выполняется соотношение $a_i R a_j$, и 0, если оно не выполняется (нулевые клетки можно оставлять пустыми).

Напр.: Для отношений R_1 и R_2 , приведенных выше, матрицы будут выглядеть так:

R_1

	3	4	5	6
2	0	1	0	1
3	1	0	0	1

 R_2

	3	4	5	6
2	0	0	0	0
3	1	0	0	0

(!!) Очевидно, что полному бинарному отношению соответствует квадратная матрица, все клетки которой заполнены единицей, тождественному – единичная матрица (квадратная матрица, у которой только на главной диагонали стоят единицы); пустому – нулевая квадратная матрица.

Пр. На множестве N определим бинарное отношение

$$R = \{(x; y) \mid x + y < 5\}.$$

Очевидно, что $(1; 3) \in R$, $(4; 1) \notin R$.

Зададим это бинарное отношение перечислением его элементов $R = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (3; 1)\}$

Матрица этого отношения имеет вид:

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	0
3	1	0	0

4.5. Операции над бинарными отношениями и их свойства

Опр. *Обращением бинарного отношения* называется переход от некоторого отношения $R \subset A \times B$ к симметричному (обратному) ему отношению $R^{-1} \subset B \times A$, образованному теми парами $(b; a)$, для которых $(a; b) \in R$.

Переход от R к R^{-1} осуществляется взаимной перестановкой координат каждой упорядоченной пары. При этом область определения становится областью значений и наоборот. Матрица обратного отношения получается транспонированием исходной матрицы, т.е. заменой строк матрицы ее столбцами при сохранении нумерации.

ПР. Пусть R_1 – « a – делитель b » ($R_1 = \{(2; 4); (2; 6); (3; 3); (3; 6)\}$).
Тогда R_1^{-1} – « b делится на a » ($R_1^{-1} = \{(4; 2); (6; 2); (3; 3); (6; 3)\}$).

Матрица отношения R_1^{-1} будет иметь вид:

	2	3
3	0	1
4	1	0
5	0	0
6	1	1

(!!) Операция обращения обладает следующими свойствами:

$$1) (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \qquad 2) (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \qquad 3) (R^{-1})^{-1} = R$$

Пусть даны три множества A , B и C и два бинарных отношения $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$.

Опр. Композицией отношений R и S называется отношение, состоящее из всех тех пар $(a; c) \in A \times C$, для которых существует такой элемент $b \in B$, что $(a; b) \in R$, $(b; c) \in S$.

Обозначение: $R \circ S$

ПР. Пусть $A = \{2; 3\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$, $C = \{6; 7; 8\}$ и
 $R = \{(2; 4), (2; 6), (3; 3), (3; 6)\}$, $S = \{(3; 6), (4; 8), (6; 6)\}$.

Тогда $R \circ S = \{(2; 8), (2; 6), (3; 6)\}$.

(!!) Матрица композиции $R \circ S$ получается как произведение матриц отношений R и S (в порядке их следования), которое выполняется по обычному правилу умножения прямоугольных матриц с последующей заменой отличного от нуля элемента результирующей матрицы единицей.

В предыдущем примере:

R:

	3	4	5	6
2	1	1	0	1
3	1	0	0	1

S:

2	0	1	0	1
3	1	0	0	1

	6	7	8
3	1	0	0
4	0	0	1
5	0	0	0
6	1	0	0

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$R \circ S$:

	6	7	8
2	1	0	1
3	1	0	0

(!!) Композиция отношений обладает следующими свойствами:

$$1) R \circ S \neq S \circ R \quad 2) (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T) \quad 3) (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

4.7. Основные свойства бинарных отношений во множестве A

Пусть R – бинарное отношение в A , т.е. $R \subset A^2$.

1) Отношение R называется **рефлексивным**, если для любого элемента $a \in A$ выполняется отношение aRa .

Напр.: отношение «быть $=$ »

2) Отношение R называется **антирефлексивным**, если для любого элемента $a \in A$ не выполняется соотношение aRa .

Напр.: отношение «быть $>$ »

3) Отношение R называется **симметричным**, если для любых двух элементов $a_i, a_j \in A$ из того, что $a_i Ra_j$, следует, что $a_j Ra_i$.

Напр.: «параллельность прямых»

4) Отношение R называется **антисимметричным**, если из соотношений $a_i Ra_j$ и $a_j Ra_i$ следует, что $a_i = a_j$.

Напр.: отношение «быть \leq »

5) Отношение R называется **асимметричным**, если ни для одной пары $a_i, a_j \in A$ не выполняются одновременно соотношения $a_i Ra_j$ и $a_j Ra_i$.

Напр.: отношение «быть моложе»

6) Отношение R называется **транзитивным**, если из того, что $a_i Ra_j$ и $a_j Ra_k$, следует, что $a_i Ra_k$.

Напр.: отношение «быть делителем»

7) Отношение R называется **антитранзитивным**, если оно не обладает свойством 6.

Напр.: «перпендикулярность прямых»

(!!) Для рефлексивного отношения все элементы матрицы на главной диагонали – единицы, а для антирефлексивного – нули. Симметричность отношения влечет и симметричность матрицы относительно главной диагонали.

4.8. Виды бинарных отношений во множестве

Опр. Отношение R в A называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Напр.: отношения «равенства», «параллельности прямых», «подобия фигур»,...

Отношения эквивалентности представляют особый интерес, т.к. именно они определяют признак, который допускает разбиение множества A на непересекающиеся подмножества, называемые классами эквивалентности. Все элементы, принадлежащие некоторому классу A_i такого разбиения, связаны отношением эквивалентности. Каждый из них определяет данный класс и может служить его представителем.

В качестве примера рассмотрим классы вычетов по модулю m .

Пусть m – любое натуральное число.

Опр. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю m* , если при делении на m они дают один и тот же остаток.

Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$

Сравнимость чисел по модулю обладает всеми свойствами эквивалентности. Поэтому множество целых чисел разбивается на классы чисел, сравнимых между собой по модулю m . Обозначим их следующим образом:

c_0 – числа, которые делятся на m ,

c_1 – которые при делении на m дают в остатке 1,

$c_2 - 2$,

...

$c_{m-1} - m-1$.

Составим теперь новое множество, элементами которого являются классы чисел, сравнимых по модулю m $Z_m = \{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\}$. Оно состоит из m элементов, и в нем можно определить действия сложения и умножения.

Рассмотрим это на конкретном примере.

Пусть $m = 2$, тогда $c_0 = \{0; \pm 2; \pm 4; \pm 6; \dots\} = \mathbf{0}$

$c_1 = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \dots\} = \mathbf{1}$

$Z_2 = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}\}$

Таблица сложения

	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблица умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

Опр. Отношение R в A называется *отношением толерантности*, если оно рефлексивно и симметрично.

Напр.: отношение «быть знакомым»

(!!) Очевидно, что отношение эквивалентности есть частный случай толерантности, когда к двум перечисленным свойствам добавляется транзитивность.

Опр. Отношение R в A называется *отношением* $\frac{\text{строгого}}{\text{нестрогого}}$ *порядка*, если оно $\frac{\text{антирефлексивно}}{\text{рефлексивно}}$, $\frac{\text{асимметрично}}{\text{антисимметрично}}$ и транзитивно.

Обозначение: \leq

(!!) Отношение порядка дает возможность сравнивать между собой различные элементы множества A .

Опр. Множество A , которое обладает отношением порядка, называется *упорядоченным*.

Напр.: упорядочено множество цифр в телефонном номере или множество букв в слове («ракета» и «каjeta»)

5. Функции и отображения

5.1. Функциональные отношения

Опр. Отношение $R \subset A \times B$ называется *функциональным (функцией)*, если каждому элементу $a \in A$ такому, что $(a; b) \in R$, соответствует один и только один элемент $b \in B$.

Матрица функционального отношения содержит в каждой строке не более одного единичного элемента. Элементам из A , не входящим в область определения отношения, соответствует нулевая строка в матрице.

Напр.: Пусть $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}$, $B = \{b_1; b_2; b_3\}$. Функциональное отношение $R = \{(a_1; b_1); (a_2; b_2); (a_3; b_1); (a_5; b_3); (a_6; b_1)\}$ имеет матрицу:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1		
a_2		1	
a_3	1		

a_4			
a_5			1
a_6	1		

В случае функционального отношения первую координату упорядоченной пары называют аргументом, а вторую – значением функции. Обычная запись $y = f(x)$ соответствует соотношению $x f y$ или $(x; y) \in f$.

Очевидно, что отношение R^{-1} , обратное функциональному отношению R , может и не быть функциональным. Так, отношение $R^{-1} = \{(b_1; a_1); (b_1; a_3); (b_1; a_6); (b_2; a_2); (b_3; a_5)\}$, обратное рассмотренному выше отношению, не является функцией.

5.2. Отображения и их типы

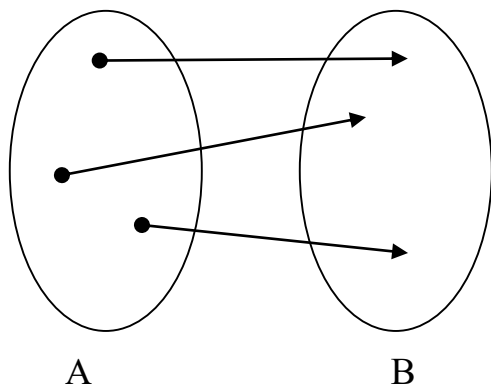
Если функциональное отношение $R \subset A \times B$ всюду определено на A , т.е. $\text{Dom } R = A$, то оно называется **отображением** множества A в B .

При этом элемент a называется **прообразом**, а элемент b – **образом**.

(!!) *Отображение - частный случай функции.*

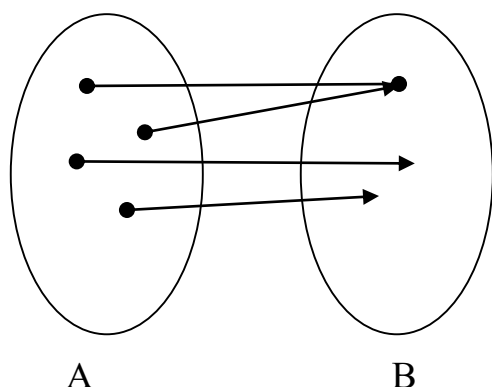
Опр. Отображение множества A во множество B , при котором различные элементы из A имеют различные образы в B , называется **инъекцией**.

При инъективном отображении каждый элемент из A имеет образ в B , однако некоторые элементы из B могут не иметь прообраза в A .



Опр. Отображение множества A во множество B , при котором любой элемент из B имеет прообраз, называется **сюръекцией**.

При сюръективном отображении различные элементы из A могут иметь один и тот же образ.



Опр. Взаимно-однозначное отображение одного множества на другое называется *биекцией*.

(!!) Очевидно, что между множествами A и B можно установить биекцию лишь тогда, когда мощности этих множеств равны.

Если $B = A$, то говорят, что определено отображение множества A на себя.

5.3. Подстановки как отображения

Опр. Взаимно-однозначное отображение множества $N = \{1; 2; \dots; n\}$ на себя называется *подстановкой n -ой степени*.

Обычно подстановку записывают двумя строками, заключенными в скобки. Первая строка содержит прообразы, а вторая – соответствующие им образы.

Напр.: Взаимно-однозначное соответствие четырёх чисел, заданное множеством упорядоченных пар $\{(1; 2); (2; 4); (3; 3); (4; 1)\}$ запишется как подстановка 4-ой степени:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ в которой } 1 \text{ переходит в } 2, 2 - \text{ в } 4, 3 - \text{ в } 3 \text{ и } 4 - \text{ в } 1.$$

Т.к. безразлично, в каком порядке следуют упорядоченные пары отображения, то одна и та же подстановка допускает различные представления:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \dots$$

Опр. Подстановка n -ой степени, переводящая каждое число в себя, называется *тождественной* подстановкой n -ой степени.

Обозначение: $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

Опр. Если в подстановке a поменять местами ее строки, то получится подстановка a^{-1} , *обратная* a .

Напр.: Если $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, то $a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Опр. *Композицией* подстановок n -ой степени a и b называется подстановка n -ой степени c , являющаяся результатом последовательного выполнения подстановок: сначала - a , затем - b .

Обозначение: $c = a \circ b$.

Напр.: Пусть $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(!!) Очевидно: 1) $a \circ e_n = e_n \circ a = a$; 2) $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e_n$.

Задания для самостоятельного решения

1. Прочитайте записи: $A = \{x \mid 2 - x = 3\}$, $B = \{x \mid x^2 + 1 = 0\}$, $C = \{x \mid x = 10k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 3 \leq 2\}$, $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 3x < 0\}$.

Определите вид каждого множества. Задайте множества перечислением элементов, если это возможно.

2. Классифицируйте следующие множества: $A = \{x \mid 2x \geq 5\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2 = 0\}$, $M = \{x \mid x : 10\}$, K – множество конденсаторов в радиоприемнике, E – множество деревьев на Луне. Какова мощность множеств B и E ?

3. Задайте множество $M = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x \leq 3\}$ списком и запишите все его двухэлементные подмножества.

4. Пусть $K = \{x \mid x^3 - 25x = 0\}$. Задайте множество списком его элементов и найдите булеан этого множества.

5. Пусть M – множество значений выражения $3,5 - 9a$ при $a = -1$ и $0,5$. Задайте это множество перечислением элементов и запишите все его подмножества.

5. Пусть $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\}$ и \mathbb{N} – множество натуральных чисел. Найдите: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap B$, $B \cup \mathbb{N}$, $A \cup B$, $A \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus B$, $A \oplus B$.

6. Найдите дополнение множества B до множества A , если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 2\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1,5 < x < 2\}$.

7. Осуществите пошаговое построение диаграмм Эйлера-Венна для множеств:

1) $\overline{A \cap B} \setminus \overline{A}$

2) $A \setminus (A \cap B \cap C)$

3) $(A \cup B \cup C) \cap (\overline{A} \setminus C)$

8. Упростите:

1) $(\overline{P} \setminus M) \cup (P \cap \overline{M})$

2) $((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B) \cap A$

3) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup \overline{\overline{A} \cup B}$

9. Докажите с помощью тождественных преобразований:

1) $\overline{K \setminus C} = \overline{K} \cup \overline{C}$

2) $((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cup (\overline{A} \setminus B) = \overline{B \cap A}$

10. Используя основные тождества алгебры множеств, докажите, что $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$. Проиллюстрируйте результат с помощью кругов Эйлера.

11. Найдите M^2 и $M \times C$, если $C = \{1; 5; 9\}$, $M = \{4; 6\}$.

12. Дано: $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Найти: $A \times B$ (что это за множество?)

13. Дано: M – множество букв алфавита в русском языке. Что собой представляет множество M^4 ? Сколько в нем элементов?

14. Какие бинарные отношения можно задать на множестве учащихся одной группы?

15. Во множестве $N = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ задано бинарное отношение $R = \{(1; 2); (1; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 3); (4; 1); (4; 2); (5; 1); (5; 3); (5; 4)\}$. Для данного отношения запишите область определения и область значений. Составьте его матрицу.

16. Какое отношение будет обратным для отношения «*быть сыном*»? «*быть \geq* »?

17. Дано отношение R – «*быть взаимно простыми*» во множестве $M = \{2; 5; 14; 15; 26\}$. Опишите матрицей данное отношение R , а также обратное ему отношение R^{-1} . Сформулируйте его.

18. Дано: $A = \{2, 8\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $C = \{6, 8\}$, $R \subset A \times B$: $R = \{(2; 4), (2; 6), (2; 8), (8; 8)\}$, $S \subset B \times C$: $S = \{(4; 8), (6; 6), (8; 8)\}$. Получите матрицу композиции R и S .

19. Определите свойства следующих отношений: а) «*быть делителем*» во множестве целых чисел; б) «*быть параллельными*» во множестве прямых плоскости; в) «*быть знакомым*» во множестве людей, проживающих в одном городе; г) «*пересекаться*» во множестве прямых пространства;

д) «*быть равными*» во множестве треугольников»; е) «*быть подобными*» во множестве фигур.

20. Найдите a^{-1} , $e \circ a$, e^2 и a^3 , если

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

- 1) Дайте понятие множества.
- 2) Какие множества называются конечными и бесконечными? Приведите примеры таких множеств.
- 3) Что такое мощность множества?
- 4) Какое множество называется пустым? Чему равна его мощность?
- 5) Какие два множества называются равномощными? равными? Приведите примеры. Можно ли равномощные множества считать равными?
- 6) Дайте понятие подмножества множества.
- 7) Какие множества считают несобственными подмножествами исходного множества?
- 8) Какая существует связь между количеством элементов во множестве и числом его подмножеств?
- 9) Как называется множество всех подмножеств исходного множества?
- 10) Перечислите способы задания множеств и охарактеризуйте каждый из них.
- 11) Что называется объединением множеств? Перечислите основные свойства этой операции.
- 12) Что называется пересечением множеств? Каковы основные свойства этой операции?
- 13) Дайте понятие разности 2-х множеств. Как исключить эту операцию?
- 14) Как найти дополнение одного множества до другого? до универсума?
- 15) Что называют дизъюнктивной суммой множеств? Как выразить эту операцию через простейшие операции над множествами?
- 16) Дайте понятие декартова произведения множеств. Как связана его мощность с мощностью исходных множеств?
- 17) Что понимают под декартовой степенью множества?

- 18) Дайте понятие бинарного отношения. Приведите примеры таких отношений на множестве чисел и людей.
- 19) Как найти область определения и область значений бинарного отношения?
- 20) Как заполняется матрица бинарного отношения?
- 21) Какое бинарное отношение называется соответствием? отношением на A ? отношением в A ?
- 22) Что значит полное отношение? тождественное отношение? пустое отношение?
- 23) Какие матрицы соответствуют полному, тождественному и пустому отображениям?
- 24) Дайте понятие обращения бинарного отношения. Какими свойствами обладает эта операция?
- 25) Определите композицию бинарных отношений? Как получается матрица композиции?
- 26) Какое бинарное отношение называется рефлексивным? антирефлексивным? Приведите примеры.
- 27) Дайте понятия симметричных, антисимметричных и асимметричных бинарных отношений и приведите примеры таких отношений.
- 28) Когда бинарное отношение является транзитивным? антитранзитивным? Приведите примеры таких отношений.
- 29) Какое отношение называется отношением эквивалентности? толерантности? строгого порядка? нестрогого порядка?
- 30) Дайте понятие функционального отношения.
- 31) Какое функциональное отношение называется отображением?
- 32) Дайте определения инъективного, сюръективного и биективного отображений.
- 33) Что называют подстановкой n -ой степени и как ее записывают?

Тест для самоконтроля

Задание № 1. (выберите два варианта ответов) Верными являются следующие утверждения...

Варианты ответов:

- 1) $2 \in \{x \mid x^2 - 1 \leq 0\}$ 2) $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ 3) $-5 \in \mathbb{Z}$ 4) $10 \notin \{n \mid n : 3\}$

Задание № 2. (выберите два варианта ответов) Истинными являются следующие утверждения о числовых множествах...

Варианты ответов:

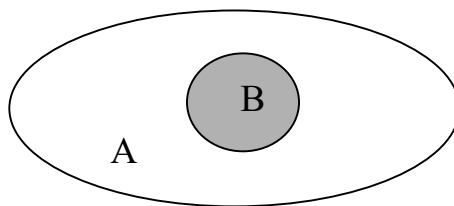
- 1) Множество целых чисел является подмножеством натуральных чисел
- 2) Множество иррациональных чисел является подмножеством действительных чисел
- 3) Промежуток $[-1; 12)$ является подмножеством отрезка $[0; 12]$
- 4) Множество корней уравнения $x^2 - 4 = 0$ является подмножеством целых чисел

Задание № 3. (выберите один вариант ответа) Пусть $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 4\}$, тогда множество $A \setminus B$ имеет вид...

Варианты ответов:

- 1) $\{1; 3\}$ 2) $\{1; 3; 4\}$ 3) $\{1; 2; 3; 4\}$ 4) $\{4\}$

Задание № 4. (выберите один вариант ответа) Даны два множества A и B



Серым цветом выделено(а)...

Варианты ответов:

- 1) объединение множеств A и B
- 2) пересечение множеств A и B
- 3) разность множеств A и B

Задание № 5. (выберите несколько вариантов ответов) Отношение «параллельность прямых» на множестве прямых на плоскости обладает свойством...

Варианты ответов:

- 1) рефлексивности
- 2) антирефлексивности
- 3) симметричности
- 4) транзитивности

Задание № 6. (выберите несколько вариантов ответов) Свойством транзитивности обладают следующие бинарные отношения...

Варианты ответов:

- 1) отношение «быть сравнимыми по модулю m » во множестве натуральных чисел
- 2) отношение «быть знакомыми» во множестве жителей одного города
- 3) отношение «быть перпендикулярными» во множестве прямых на плоскости
- 4) отношение «подобия» во множестве фигур на плоскости

Задание № 7. (выберите один вариант ответа) Обратной для подстановки

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ является подстановка...}$$

Варианты ответов:

- 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Задание № 8. (выберите один вариант ответа) Композицией двух подстановок

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ является подстановка...}$$

Варианты ответов:

- 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Ответы на тест:

№1 – 3,4; №2 – 2,4; №3 – 1; №4 – 2; №5 – 1,3,4; №6 – 1,4; №7 – 3; №8 – 2.